РАЗДЕЛ IV

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 004.932.2

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИНВАРИАНТНОГО СРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

Д.Б. Абрамов, С.О. Баранов, С.В. Лейхтер
Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия «СибАДИ», Омск, Россия

Аннотация. *Рассмотрена задача оценивания нормы расстояния между двумя замкнутыми гладкими кривыми при распознавании образов. Описаны диффеоморфные преобразования кривых на основе модели больших деформаций. Для оценивания нормы расстояния между двумя замкнутыми кривыми формируется функционал, соответствующий норме расстояния между двумя кривыми, и уравнение эволюции диффеоморфных преобразований. Предложен алгоритм решения уравнения диффеоморфного преобразования, построенный на основе метода PSO, который позволяет значительно сократить объем вычислительных операций по сравнению с градиентными методами решения. Разработанные в работе алгоритмы могут использоваться в биоинформатике и биометрических системах, классификации изображений и объектов, системах машинного зрения, при распознавании образов и объектов, системах трекинга.*

Ключевые слова*: распознавание образов, машинное зрение, инвариантность, диффеоморфные преобразования, биоинформатика, метод PSO.*

Введение

Распознавание объектов по изображениям независимо от их расположения, ориентации, масштаба и перспективы – является важным направлением информационных технологий в области распознавания образов и машинного зрения. В задачах математической морфологии важной является задача сопоставления близких форм, а не точное определение каждой формы; деформация сложной фигуры может привести к пониманию формы. Изучение формы и изменчивости изображения в рамках теории распознавания образов можно свести к оцениванию преобразований, которые последовательно деформируют изображения. Вычисление многомерных нежестких преобразований изображений привело к развитию стратегии эластичного сравнения, при этом преобразование линеаризуется относительно системы координат исходного изображения и генерируется векторное поле смещений. Стоимость преобразования измеряется функционалом – нормой разности между преобразованным исходным изображением и эталонным изображением; оптимальному преобразованию этого функционала соответствует векторное поле смещений с наибольшей гладкостью. Измерение гладкости достигается указанием нормы в пространстве векторных полей с использованием дифференциального оператора. Одним из ограничений данного подхода является то, что не гарантируется биективность преобразования. Представляет интерес вычисление диффеоморфных преобразований, которые сами являются гладкими, но и обратные преобразования сохраняют свойства гладкости. Модель больших деформаций для вычисления преобразований изображений [0] гарантирует, что преобразования, вычисленные между изображениями, диффеоморфны. При этом преобразование исходных точек области в требуемые формируется на основе зависящего от времени векторного поля скоростей, которое определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE).

В работе рассмотрена задача оценивания нормы расстояния между двумя замкнутыми гладкими кривыми при распознавании 2D-образов. Рассмотрены действия групп переноса, вращения и масштабирования на 2D замкнутую кривую, инварианты к действию этих групп. Для оценивания нормы расстояния между кривыми положение кривых нормализуется центрированием, приведением главных осей инерции изображения к осям системы координат и приведением к единице площади замкнутой кривой соответствующим масштабированием. Для оценивания нормы расстояния между двумя замкнутыми кривыми формируется функционал, соответствующий норме расстояния между двумя кривыми, и уравнение эволюции диффеоморфных преобразований. Предложен алгоритм решения уравнения диффеоморфного преобразования, построенный на основе метода PSO, который позволяет значительно сократить объем вычислительных операций по сравнению с градиентными методами решения.

Разработанные в работе алгоритмы могут использоваться в биоинформатике и биометрических системах, классификации изображений и объектов, системах машинного зрения, нейровизуализации, при распознавании образов и объектов, системах трекинга. Алгоритм оценивания нормы расстояния между замкнутыми кривыми методом диффеоморфного преобразования может распространен на пространственные объекты (кривые, поверхности, многообразия).

Построение инвариантов переноса, вращения и масштабирования

Для нахождения инвариантов при распознавании образов необходимо найти группу G, действующую на множестве аргументов функции изображения. Изображение объекта может быть описано функцией $f(x,y)=1$, если $(x,y)\in S\subset \mathbf{R}^2$ ($f(x,y)=0$, иначе), где (x,y) – декартовы координаты изображения с границей $c=\partial S$ множества S. Действие группы переноса на функцию $f(x,y)$ в направлении:

оси X: $g_{\varepsilon_x} f(x,y)=f(x+\varepsilon_x,y)$;

оси Y: $g_{\varepsilon_y} f(x,y)=f(x,y+\varepsilon_y)$.

Действие группы масштабирования на функцию $f(x,y)$:

$$g_{\varphi_s} f(x,y)=f\left((1+\varphi_s)x,(1+\varphi_s)y\right).$$

Действие группы вращения (поворот на угол α):

$$g_\alpha f(x,y)=f(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$
.

Инвариантность по отношению к группе переноса может быть обеспечена нахождением центра (x_0,y_0) с последующим переносом. Для действия группы переноса на функцию 2D-изображения нахождение центра изображения сводится к методу моментов [2]. Сформируем моменты порядка $(p+q)$ 2D-функции $f(x,y)$:

$$m_{p,q}=\int_S x^p y^q f(x,y)dS;\, p,q\in \mathbf{Z}^+;$$

например, площадь изображения:

$$m_{0,0}=\int_S f(x,y)dS\cdot$$

Центр (x_0,y_0) функции изображения $f(x,y)$ определяется из соотношений: $x_0=m_{1,0}m_{0,0}^{-1}$; $y_0=m_{0,1}m_{0,0}^{-1}$. Центрированная функция $f(x+x_0,y+y_0)$ является инвариантной по отношению к действию группы переносов. Для нормализации изображения перенесем центр $f(x,y)$ в начало координат. Нормализованные моменты: $f(x+x_0,y+y_0)$ являются инвариантами масштабирования. Подействуем на $f(x,y)$ таким элементом группы масштабирования g_{φ_s}, что значение будет $F=1$.

Для выделения определенной ориентированной системы координат построим тензор изображения: $J=\begin{pmatrix} m_{2,0} & -m_{1,1} \\ -m_{1,1} & m_{0,2}\end{pmatrix}$. При повороте объекта угол α с матрицей направляющих косинусов $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ тензор инерции изменяется по закону: $J' = T^T \cdot J \cdot T$. При повороте объекта на угол: $\alpha = 0{,}5 \cdot \operatorname{arctg}\left(2J_{xy}\left(J_{yy} - J_{xx}\right)^{-1}\right)$, тензор инерции будет иметь диагональный вид $J^d = \operatorname{diag}\left(J_x \quad J_y\right) \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, где J_x, J_y – собственные числа тензора инерции J. При $J_x \neq J_y$ можно провести такое преобразование координат: $\left(x' \quad y'\right)^T = T\left(x \quad y\right)^T$ – формированием поворота T, что оси X,Y будут направлены по главным осям тензора инерции 2 D-изображения.

Будем рассматривать C^1 замкнутую кривую – как непрерывно дифференцируемое отображение $c: S^1 \to \mathbf{R}^2; S^1 = \left\{x \in \mathbf{R}^2 \middle| |x| = 1\right\}$, для которого производная $c'(\theta)$ существует для любого значения a и $c'(\theta) \neq 0; \forall\theta \in S^1$.

Для нормализации изображения необходимо решить задачу нахождения центра изображения и выделенной ориентации группы вращения с последующим центрированием и масштабирования изображения.

Действие элементов групп на кривые

Рассмотрим действие матричных групп на кривые можно представить: $A \to A \circ c$, где $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ действие матричной группы в $\mathbf{R}^2$. Приведем примеры матричных групп [3].

- $GL(2)$ – линейная группа матриц $GL(2) = \left\{A \in \mathbf{R}^{2\times 2}; \det A \neq 0\right\}$ с законом композиции – умножением матриц.
- $SO(2) \in GL(2)$ – специальная ортогональная группа может быть представлена матрицами $SO(2) := \left\{A \in \mathbf{R}^{2\times 2} \mid AA^T = A^T A = \mathrm{Id}; \det(A) = 1\right\}$.
- Группа масштабирования может быть представлена диагональными матрицами $A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \rho \in \mathbf{R}^+$.
- $SE(2)$ – специальная группа Евклида определяется полупрямым произведением $SO(2) \otimes \mathbf{R}^2$.

Дифференцируемая кривая в $GL(2)$ это функция: $g_t : (a,b) \to GL(2)$, для которых существует производная $dg_t/dt; \forall t \in (a,b)$. Уравнение первого порядка для элемента матричной группы: $dg_t/dt = A \cdot g_t$; $g_{t=0} = \mathrm{Id}$, где $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ - матрица с постоянными элементами, имеет решение: $g_t = \exp(tA)$, которое обладает групповыми свойствами.

Кривая, соединяющая элементы $g_0, g_1 \in GL(2)$, минимизирующая функционал:

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 \, dt = \int_0^1 \left\langle Lv_t, v_t \right\rangle_2 dt; L \in \mathbf{R}^{2\times 2}, \qquad (1)$$

и удовлетворяющая уравнению $dg_t/dt = v_t \cdot g_t$, является решением уравнения Эйлера [4]:

$$d\left(Lv_t\right)/dt = \left(Lv_t\right)v_t^* - v_t^*\left(Lv_t\right). \qquad (2)$$

Группа диффеоморфных преобразований

Будем считать, что замкнутые кривые принадлежат открытому подмножеству $X \subset \mathbf{R}^2$. Диффеоморфизм X является обратимым непрерывно дифференцируемым преобразованием $X \to X$; существует тождественное отображение (Id – композиция прямого и обратного диффеоморфизма). Множество диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(X)$ определяют структуру группы. Диффеоморфизмы изменяют количественные характеристики объектов, которые определены на множестве X. Матричные группы диффеоморфизмов имеют конечную размерность и кодируется с помощью параметров матриц.

Рассмотрим группу бесконечномерных диффеоморфизмов, действующих на ограниченном множестве $X \subset \mathbf{R}^2$. Определим диффеоморфизм $g : X \to X$ с обратным элементом g^{-1} и определим группу преобразований G, как подгруппу диффеоморфизмов, с законом композиции $\circ$: $g \circ g' = g(g') \in G$. Для формирования диффеоморфных отображений диффеоморфизмы рассматриваются как потоки ODE. Предположим, диффеоморфизмы $g_t(x); x \in X$ эволюционируют во времени $t \in [0,1]$ с векторным полем $v_t(\cdot)$:

$$dg_t(x)/dt = v_t(g_t(x));\ g_0(x) = x \qquad (3)$$

Формированием требуемого векторного поля $v_t(\cdot)$ в любой момент времени $t \in [0\ldots1]$ можно добиться такого действия элементов группы $g_t(\cdot)$ на точки пространства $X \subset \mathbf{R}^2$, что $g_0(x) = x; g_1(x) = y; \forall x, y \in X$.

Допустим, что задана норма $\|v_t\|_V^2 = \langle Lv_t, v_t \rangle_2 = \int_S (Lv_t)^* v_t dS$, где $\alpha_t = Lv_t; t \in [0,1]$ – момент векторного поля. Для $g_t \in G$ существуют скорости $v_t(g_t) = dg_t/dt$, минимизирующие функционал:

$$\Phi(v_t) = \int_0^1 \|v_t\|_V^2\, dt = \int_0^1 \langle Lv_t, v_t \rangle_2\, dt, \qquad (4)$$

на траектории, соединяющей элементы группы $g_0 = g|_{t=0}$ и $g_1 = g|_{t=1}$. Представим обратную связь между скоростью v_t и моментом α_t в форме:

$$v_t = L^{-1}\alpha_t = K\alpha_t. \qquad (5)$$

Для дифференциального оператора: $L = \mathrm{id} - a\nabla^2$ в $\mathbf{R}^2$ – обратный оператор $K = L^{-1}$ аппроксимируем функцией:

$$K(x) = \beta e^{-\gamma^{-1}\|x\|^2}. \qquad (6)$$

Уравнения эволюции диффеоморфизмов Эйлера-Пуанкаре можно получить решением уравнений вариационной задачи с функционалом $\Phi(v_t)$ [5]:

$$d\alpha_t/dt = -(D\alpha_t)\, v_t - \alpha_t \nabla v_t - (Dv_t)^T \alpha_t \qquad (7)$$

где $Df = (\partial f_i/\partial x_j); i, j = 1,2$.

Если объектами являются точечные множества, то векторные поля в точках $x_t = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$ принимают вид:

$$v_t(\cdot) = \sum_{l=1}^{N} K(\cdot, x_l)\alpha_l\,.$$

Уравнения вариационной задачи позволяет перемещать объекты вдоль траекторий, которым соответствуют диффеоморфные преобразования. Диффеоморфизмы не позволяют изменить топологию вдоль геодезических траекторий. Неточный вид диффеоморфизмов [6, 7] обеспечивает механизм, который позволяет при эволюции геодезических отклоняться от точных деформаций. В задаче неточного сравнения минимизируемый функционал содержит член, который оценивает точность попадания точек $g_1(x_n^0); n = 1, \ldots, N$ в требуемые позиции x_n^1:

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2\, dt + \sigma^{-2} \sum_{n=1}^{N} \left\| x_n^1 - g_1(x_n^0) \right\|^2, \qquad (8)$$

при этом в уравнения Эйлера-Пуанкаре диффеоморфных преобразований вводится параметр σ^2:

$$\begin{aligned} &dx_k/dt - v_t(x_k) = \sigma^2 \alpha_k; v_t(\cdot) = \\ &= \sum_{l=1}^{N} K(\cdot, x_l)\alpha_l; d\alpha_k/dt = -\sum_{l=1}^{N} \nabla_1 K(x_k, x_l)\alpha_k^T \alpha_l, \end{aligned} \qquad (9)$$

здесь $\nabla_1 K$ представляет собой градиент функции $(x, y) \to K(x, y)$ по отношению к первой координате. Примем для оператора L функцию $K(x,\cdot)$ в виде: $K(x,\cdot)=e^{-\gamma^{-1}\|x-(\cdot)\|^2}$. Тогда:

$$\nabla_1 K(x_k,x_l)=-2\gamma^{-1}(x_k-x_l)e^{-\gamma^{-1}\|x_k-x_l\|^2}.$$

Решение задачи методом PSO

При решении уравнения (9) необходимо определить краевые условия:

$\alpha_0=(\alpha_1(0),\ldots,\alpha_N(0))$ и $\alpha_1=(\alpha_1(1),\ldots,\alpha_N(1))$ при известных $x_0=(x_1(0),\ldots,x_N(0))$ и $x_1=(x_1(1),\ldots,x_N(1))$.

Применение градиентных методов решения задачи (9) требует значительное количество вычислительных операций. Для решения этой задачи в работе предлагается применение метода пристрелки (shooting) с использованием алгоритма PSO (particle swarm optimization). Метод пристрелки заключается в нахождении такого начального вектора $\alpha_0=(\alpha_1(0),\ldots,\alpha_N(0))$, что значение функционала (8) минимизируется.

Метод PSO основан на имитации поведения роя насекомых и был предложен J. Kennedy в 1995 году [8]. В контексте многопараметрической оптимизации рой (swarm) имеет фиксированный размер; каждая частица первоначально расположена в случайных местах в многомерном пространстве проектирования. Частицы имеют две характеристики: положение и скорость. Положение частицы определяется значением целевой функции. Частицы обмениваются информацией (лучшими позициями) и могут корректировать свои позиции и скорости. Алгоритм метода PSO приведен в приложении.

Пример. Рассмотрим пример диффеоморфного преобразования замкнутой кривой – окружности единичного радиуса (эллипс с эксцентриситетом $\varepsilon=0$ и длиной окружности 2π) в отрезок прямой длиной π (эллипс с $\varepsilon=1$) за единичный период времени. Для этого выберем $N=12$ точек на эллипсе, соответствующие параметру $\theta_i=2\pi iN^{-1}; i=1,\ldots,N$. Выберем параметр уравнения диффеоморфных преобразований: $\sigma^2=10^{-4}$; параметр метод PSO: $\vartheta=0,7$; число частиц: 10. В таблице 1 представлены результаты моделирования диффеоморфных преобразований точек эллипса от значения эксцентриситета $\varepsilon=0$ до $\varepsilon=1$ для четырех точек (из 12) замкнутой кривой.

Таблица 1 – Результаты моделирования диффеоморфных преобразований

t	x_0^0	x_3^0	x_6^0	x_9^0	x_0^0	ε
0	(0,00; 1,00)	(1,00; 0,00)	(0,00; -1,00)	(-1,00; 0,00)	(0,00; 1,00)	0,000
2	(0,01; 0,77)	(1,41; -0,01)	(-0,01; -0,77)	(-1,43; 0,02)	(0,01; 0,77)	0,840
4	(0,02; 0,55)	(1,83; -0,01)	(-0,02; -0,55)	(-1,84; 0,02)	(0,02; 0,55)	0,954
6	(0,02; 0,36)	(2,22; -0,01)	(-0,02; -0,36)	(-2,22; 0,03)	(0,02; 0,36)	0,987
8	(0,02; 0,18)	(2,56; -0,01)	(-0,02; -0,18)	(-2,54; 0,03)	(0,02; 0,18)	0,998
10	(0,03; 0,00)	(2,85; -0,02)	(-0,03; 0,00)	(-2,82; 0,05)	(0,03; 0,00)	1,000
	x_0^1	x_3^1	x_6^1	x_9^1	x_0^1	
x^1	(0,00; 0,00)	(3,14; 0,00)	(0,00; 0,00)	(-3,14; 0,00	(0,00; 0,00)	1,000

В результате получена дисперсия неточности попадания:

$\sum_{n=1}^{12}\left\|x_n^1 - g_1\left(x_n^0\right)\right\|^2 = 0,34$ и среднее отклонение одной точки от цели:

$$\sqrt{12^{-1}\sum_{n=1}^{12}\left\|x_n^1 - g_1\left(x_n^0\right)\right\|^2} = 0,17.$$

Для повышения точности попадания необходимо увеличить число итераций и количество частиц в методе PSO, а также уменьшить параметр дисперсии σ^2.

Заключение

Рассмотрена задача оценивания расстояния между замкнутыми 2D кривыми. Представлены методы нахождения инвариантов к действию групп переноса, вращения и масштабирования на замкнутую кривую, не зависящие от координатного описания изображения. Для оценивания нормы расстояния между двумя замкнутыми кривыми формируется функционал, соответствующий норме расстояния между двумя кривыми, и уравнение эволюции диффеоморфных преобразований, полученное решением вариационной задачи. Предложен алгоритм решения уравнения диффеоморфного преобразования, построенный на основе метода PSO, который позволяет значительно сократить объем вычислительных операций по сравнению с градиентными методами решения. В дальнейшем алгоритм решения уравнения диффеоморфного преобразования будет распространен на 3D объекты: точечные множества, кривые и поверхности. Следуетрассмотреть задачу распознавания динамически изменяющихся объектов методом решения уравнений диффеоморфного преобразования.

Метод PSO [9]

Рассмотрим задачу оптимизации (максимизации) без ограничений: $\text{Maximize} f(\mathbf{X}); \mathbf{X}^{(l)} \le \mathbf{X} \le \mathbf{X}^{(u)}$, где $\mathbf{X}^{(l)}, \mathbf{X}^{(u)}$ – нижняя (lower) и верхняя (upper) границы $\mathbf{X}$. Пусть число частиц N. Процедура PSO применяется с использованием следующих шагов.

1. Сформируем случайное начальное множество $\mathbf{X}_1(0),\ldots,\mathbf{X}_N(0)$. Положение и скорость частицы j при итерации i: $\mathbf{X}_j^{(i)}, \mathbf{V}_j^{(i)}$, соответственно. Определим значение целевой функции:

$$f\left[\mathbf{X}_1(0),\ldots,\mathbf{X}_N(0)\right].$$

2. Найдем скорости частиц. Начальные скорости всех частиц принимаются равными нулю и номер итерации: $i = 1$.

3. На итерации i найдем параметры $\mathbf{X}_j^{(i)}, \mathbf{V}_j^{(i)}$ частицы j:

(a) Историческое лучшее значение положения $\mathbf{X}_j^{(i)}$: $\mathbf{P}_{best,j}$ с лучшим значением целевой функции $f\left[\mathbf{X}_j^{(i)}\right]$ частицы j на всех предыдущих итерациях. Историческое лучшее значение положения $\mathbf{X}_j^{(i)}$: $\mathbf{G}_{best}$ с лучшим значением целевой функции $f\left[\mathbf{X}_j^{(i)}\right]$ на всех предыдущих итерациях для всех N частиц; (b) найдем скорость частицы j на итерации i:

$$\mathbf{V}_j^{(i)} = \vartheta \cdot \mathbf{V}_j^{(i-1)} + c_1 r_1\left[\mathbf{P}_{best,j} - \mathbf{X}_j^{(i-1)}\right] + $$
$$+ c_2 r_2\left[\mathbf{G}_{best} - \mathbf{X}_j^{(i-1)}\right] + c_3 \cdot r_3 \cdot 2^{-i/i_0},$$

где c_1, c_2, c_3 – скорости обучения, $r_1, r_2, r_3 \in [0\ldots1]$ – равномерно случайно распределенные числа; (c) найдем положение частицы j на итерации i: $\mathbf{X}_j^{(i)} = \mathbf{X}_j^{(i-1)} + \mathbf{V}_j^{(i)}$, и соответствующее значение целевой функции $f\left[\mathbf{X}_1^{(i)},\ldots,\mathbf{X}_N^{(i)}\right]$.

4. Шаг 3 повторяется с $i = i + 1$ и новыми значениями $\mathbf{P}_{best,j}, \mathbf{G}_{best}$. Процесс продолжается до тех пор, пока все частицы не сойдутся к значению, обеспечивающему оптимум целевой функции.

Библиографический список

1. Beg M.F. et al. Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms // International journal of computer vision. – 2005. – Т. 61. – №. 2. – С. 139-157.

2. Чуканов С.Н. Преобразование Фурье функции трехмерного изображения, инвариантное к действию групп вращения и переноса // Автометрия. – 2008. – Т. 44. – №. 3. – С. 80-87

3. Baker A. Matrix groups: An introduction to Lie group theory. – Springer Science & Business Media, 2012.

4. Arnold V.I., Khesin B.A. Topological methods in hydrodynamics. – Springer Science & Business Media, 1998.

5. Holm D.D. et al. Geometric mechanics and symmetry: from finite to infinite dimensions. – London: Oxford University Press, 2009.

6. Miller M.I., Trouve A., Younes L. Geodesic shooting for computational anatomy // Journal of mathematical imaging and vision. – 2006. – Т. 24. – №. 2. – С. 209-228

7. Bruveris M., Holm D.D. Geometry of image registration: The diffeomorphism group and momentum maps // Geometry, Mechanics, and Dynamics. - Springer New York, 2015. - С. 19-56

8. Kennedy J. et al. Swarm intelligence. – Morgan Kaufmann, 2001.

9. Yang X.S. Nature-inspired optimization algorithms. – Elsevier, 2014.

APPLICATION OF PSO FOR SOLVING PROBLEMS OF INVARIANT COMPARISON OF TWO-DIMENSIONAL CLOSED CURVE

D.B. Abramov, S.O. Baranov, S.V. Leykhter

Abstract. The problem of estimating the norm of the distance between the two closed smooth curves for pattern recognition is considered. Diffeomorphic transformation curves based on the model of large deformations is described. For estimating of the norm of the distance between two closed curves is formed the functional corresponding normalized distance between the two curves, and the equation of evolution diffeomorphic transformations. An algorithm for solving the equation of diffeomorphic transformation is proposed, built on the basis of PSO, which can significantly reduce the number of computing operations, compared with gradient methods for solving. The developed algorithms can be used in bioinformatics and biometrics systems, classification of images and objects, machine vision systems, for pattern recognition and object tracking systems.

Keywords: invariance, rotation group, translation group, diffeomorphic transformation, PSO method.

References

1. Beg M.F. et al. Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms // International journal of computer vision. – 2005. – Т. 61. – №. 2. – С. 139-157.

2. Chukanov S.N. The Fourier transform of a function of three-dimensional image, invariant to the action of the rotation group and transfer. Avtometria, 2008, no. 3, pp. 80-87

3. Baker A. Matrix groups: An introduction to Lie group theory. – Springer Science & Business Media, 2012.

4. Arnold V.I., Khesin B.A. Topological methods in hydrodynamics. – Springer Science & Business Media, 1998.

5. Holm D. D. et al. Geometric mechanics and symmetry: from finite to infinite dimensions. – London: Oxford University Press, 2009.

6. Miller M. I., Trouve A., Younes L. Geodesic shooting for computational anatomy // Journal of mathematical imaging and vision. – 2006. – Т. 24. – №. 2. – С. 209-228

7. Bruveris M., Holm D. D. Geometry of image registration: The diffeomorphism group and momentum maps // Geometry, Mechanics, and Dynamics. - Springer New York, 2015. - С. 19-56

8. Kennedy J. et al. Swarm intelligence. – Morgan Kaufmann, 2001.

9. Yang X. S. Nature-inspired optimization algorithms. – Elsevier, 2014.

Абрамов Дмитрий Борисович (Россия, Омск) – аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления» ФГБОУ ВПО «СибАДИ» (644080, г. Омск, пр. Мира, 5, e-mail: abramov@kvarkstudio.ru).

Баранов Сергей Олегович (Омск, Россия) – аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления» ФГБОУ ВПО «СибАДИ» (644080, г. Омск, пр. Мира, 5, email: baranov@kvarkstudio.ru)

Лейхтер Сергей Владимирович (Омск, Россия) – аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления» ФГБОУ ВПО «СибАДИ» (644080, г. Омск, пр. Мира, 5, email: leykhter@mail.ru)

Abramov Dmitry Borisovich (Omsk, Russian) – postgraduate of the Department "Automated Systems of Information Processing and Management" "SibADI" (644080, Omsk, Mira, 5, email: abramov@kvarkstudio.ru)

Baranov Sergey Olegovich (Omsk, Russian) – postgraduate of the Department "Automated Systems of Information Processing and Management" "SibADI" (644080, Omsk, Mira, 5, email: baranov@kvarkstudio.ru)

Leykhter Sergey Vladimirovich (Omsk, Russian) – postgraduate of the Department "Automated Systems of Information Processing and Management" "SibADI" (644080, Omsk, Mira, 5, email: leykhter@mail.ru)