

РАЗДЕЛ II

СТРОИТЕЛЬСТВО. СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ

УДК 624.04

ДИНАМИКА ВАНТОВОГО АВТОДОРОЖНОГО МОСТА

Г.М. Кадисов
ФГБОУ ВПО «СибАДИ», Россия, Омск.

Аннотация. Задача о колебаниях вантового моста, представленного складкой с абсолютно жесткими поперечными диафрагмами, пилоном и вантами, совместно с регулярной колонной грузовых автомобилей, движущихся с постоянной скоростью, исследована путем численного решения системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода. На конкретном примере показана возможность возникновения резонанса при движении колонны со скоростью, равной отношению шага регулярности к периоду собственной формы моста, с учетом частотно-зависимого внутреннего трения.

Ключевые слова: складка, пylon, ванты, колонна автомобилей, резонанс.

Введение

История вопроса о воздействии подвижной нагрузки на мосты изложена в [1], при этом отмечены четыре варианта задачи о движении груза по балке с учетом и без учета массы. Для решения задач о динамике автодорожных мостов, нагрузки которых являются случайными функциями как времени, так и пространственных переменных, предложено в [2] использовать корреляционные функции обобщенных сил или спектральный метод. Задача о движении колесной пары по складке решена в [3]. Задачи в двумерной постановке о динамике висячих и вантовых мостов изложены в [4]. Решения пространственных задач о динамике однопролетных и неразрезных многопролетных автодорожных мостов под воздействием или одиночных или регулярной колонны грузовых автомобилей даны в [5]. Особенности динамики железнодорожных мостов достаточно подробно рассмотрены в [6]. Ниже рассматриваются особенности решения задач динамики вантовых мостов в пространственной постановке.

Так при движении одного автомобиля по однопролетному строению наибольшее динамическое воздействие оказывается при скорости, значительно меньшей критической, при которой автомобиль за время, равное половине основного периода собственных колебаний пролетного строения, успевает пройти весь пролет. В случае регулярной колонны автомобилей наибольший динамиче-

ский эффект проявляется при скорости, обеспечивающей продвижение колонны на один шаг регулярности за один период свободных колебаний пролетного строения. Ниже представлены особенности решения задачи о совместных колебаниях вантового моста с подвижной инерционной нагрузкой. Колебания вантового моста, представленного складкой с абсолютно жесткими поперечными диафрагмами, пилоном и вантами, совместно с регулярной колонной грузовых автомобилей получены численным решением системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода с учетом скорости движения колонны и параметров вязкоупругости складки.

Уравнения динамики системы «вантовый мост + колонна автомобилей»

Для решения поставленной задачи сначала необходимо определить основные динамические свойства вантового моста, в основном собственные частоты и собственные формы. Методы решения задач на собственные значения изложены в [7].

Для определения собственных частот и собственных форм вантового моста сначала необходимо решить вспомогательные задачи на собственные значения для раздельных его конструкций – складки и пилона. Рассматривая сначала только складку, примем для нее расчетную схему метода перемещений. Пусть \mathbf{R}_i – реакции распределенных вдоль узловых линий складки дополнительных связей и \mathbf{M}_i

– приведенная матрица инерционности для i -й гармоники складки, тогда собственные формы складки Φ_{ik} с собственными числами λ_{ik} (квадратами собственных частот) определяются из однородного уравнения $(\mathbf{R}_i - \lambda_{ik} \mathbf{M}_i) \Phi_{ik} = \mathbf{0}$. Отметим, что для каждой гармоники количество собственных частот и собственных форм равно учетверенному числу узловых линий складки.

Аналогично можно найти собственные формы Φ_{pk} и собственные числа λ_{pk} пилона из однородного уравнения $(\mathbf{R}_p - \lambda_{pk} \mathbf{M}_p) \Phi_{pk} = \mathbf{0}$, в котором приняты \mathbf{R}_p и \mathbf{M}_p – матрицы реакций и масс пилона. Собственные формы складки и пилона нормированы: $\Phi_{ik}^T \mathbf{M}_i \Phi_{ik} = 1$, $\Phi_{pk}^T \mathbf{M}_p \Phi_{pk} = 1$.

Для определения собственных частот и собственных форм вантового моста используем смешанный метод, включающий уравнения равновесия и уравнения совместности. Уравнения равновесия складки содержат в качестве неизвестных \mathbf{z}_i – амплитуды узловых перемещений i -й гармоники складки, \mathbf{x} – усилия в вантах и \mathbf{y} – усилия взаимодействия диафрагм и складки:

$$(\mathbf{R}_i - \lambda \mathbf{M}_i) \mathbf{z}_i + \mathbf{R}_{ix} \mathbf{x} + \mathbf{R}_{iy} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (i = \overline{1, n_s}), \quad (1)$$

где \mathbf{R}_{ix} , \mathbf{R}_{iy} – реакции распределенных по i -й гармонике вдоль узловых линий складки дополнительных связей от усилий \mathbf{x}, \mathbf{y} . В уравнениях равновесия пилона неизвестными являются \mathbf{z}_p – амплитуды узловых перемещений пилона и \mathbf{x} – усилия в вантах:

$$(\mathbf{R}_p - \lambda \mathbf{M}_p) \mathbf{z}_p + \mathbf{R}_{px} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (p = \overline{1, n_p}); \quad (2)$$

\mathbf{R}_{px} – аналогичные реакции в дополнительных связях пилона.

Усилия \mathbf{y} взаимодействия диафрагм и складки соответствуют уравнениям равновесия

$$\mathbf{Dy} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где \mathbf{D} – прямоугольная матрица коэффициентов с числом блоков, равным числу диафрагм. Каждый блок этой матрицы содержит 3 строки и столько столбцов, сколько сил взаимодействия одной диафрагмы со складкой.

В дополнение к уравнениям равновесия (1), (2) и (3) составим уравнения совместности деформаций складки, пилона и ванта

$$\sum \Delta_{xi} \mathbf{z}_i + \sum \Delta_{xp} \mathbf{z}_p + \Delta_{xx} \mathbf{x} = \mathbf{0}; \quad (4)$$

и уравнения совместности складки и диафрагм

$$\sum \Delta_{yi} \mathbf{z}_i = \Delta_y; \quad (5)$$

Δ_y – перемещения складки в сечениях с абсолютно жесткими диафрагмами по направлению усилий \mathbf{y} определяются по вектору \mathbf{z} перемещений абсолютно жестких диафрагм, его размерность равна утроенному количеству диафрагм

$$\Delta_y = \mathbf{D}^T \mathbf{z}. \quad (6)$$

Уравнение (3) выражает равенство нулю равнодействующих сил взаимодействия каждой диафрагмы со складкой. Вектор \mathbf{y} преобразуем $\mathbf{y} = \mathbf{By}_0$ через равнодействующие \mathbf{y}_0 .

Амплитуды узловых перемещений i -й гармоники складки и пилона представим рядами по собственным формам $\mathbf{z}_i = \sum \mathbf{a}_{ik} \Phi_{ik}$, $\mathbf{z}_p = \sum \mathbf{a}_{pk} \Psi_{pk}$ и подставим их в (1), (2). С учетом ортогональности собственных форм складки Φ_{ik} и пилона Ψ_{pk} получим коэффициенты этих рядов:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ik} &= -(\lambda_{ik} - \lambda)^{-1} \Phi_{ik}^T \mathbf{R}_{ix} \mathbf{x} - (\lambda_{ik} - \lambda)^{-1} \Phi_{ik}^T \mathbf{R}_{iy} \mathbf{By}_0; \\ \mathbf{a}_{pk} &= -(\lambda_{pk} - \lambda)^{-1} \Psi_{pk}^T \mathbf{R}_{px} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь уравнения совместности (4) и (5) после замены \mathbf{z}_i и \mathbf{z}_p рядами по собственным формам с коэффициентами (7) принимают вид:

$$\left[\sum \sum \frac{\mathbf{H}_{ikx}^T \mathbf{H}_{ikx}}{\lambda_{ik} - \lambda} + \sum \sum \frac{\mathbf{H}_{ikx}^T \mathbf{H}_{pkx}}{\lambda_{pk} - \lambda} + \Delta_{xx} \right] \mathbf{x} + \left[\sum \sum \frac{\mathbf{H}_{ikx}^T \mathbf{H}_{iky} \mathbf{B}}{\lambda_{ik} - \lambda} \right] \mathbf{y}_0 = \mathbf{0};$$

$$\left[\sum \sum \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{H}_{iky}^T \mathbf{H}_{ikx}}{\lambda_{ik} - \lambda} \right] \mathbf{x} + \left[\sum \sum \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{H}_{iky}^T \mathbf{H}_{iky} \mathbf{B}}{\lambda_{ik} - \lambda} \right] \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}, \quad (8)$$

где введены обозначения: $\mathbf{H}_{ikx} = \Phi_{ik}^T \mathbf{R}_{ix}$,
 $\mathbf{H}_{pkx} = \Psi_{pk}^T \mathbf{R}_{px}$.

Приравнивая определитель однородной системы (8) к нулю, находим собственные значения всей системы в целом. Особенность определителя здесь состоит в том, что его полюсы соответствуют собственным числам раздельных складки λ_{ik} и пилона λ_{pk} , а нули – собственным числам всей конструкции. Эта особенность позволяет между каждой парой соседних полюсов последовательно вычислить нули, например, методом деления отрезка пополам, или равномерными шагами и т.п. По каждому найденному собственному числу λ_j вычисляются \mathbf{x}^j и \mathbf{y}_0^j , а затем по формулам (7) – коэффициенты рядов \mathbf{a}_{ik}^j и \mathbf{a}_{pk}^j . Теперь можно составить для вантового моста в целом собственный вектор, часть которого содержит перемещения складки, другая – пилона:

$$\mathbf{z}^j = \left(\sum_k \mathbf{a}_{ik}^j \Phi_{ik}, \sum_k \mathbf{a}_{pk}^j \Psi_{pk} \right). \quad (9)$$

Для дальнейшего каждый собственный вектор нормируется.

После определения спектра собственных частот и собственных форм вантового моста в целом можно приступить к решению неоднородной системы уравнений, описывающей колебания вантового моста при движении регулярной колонны автомобилей. Активными будем считать автомобили, находящиеся в данный момент на пролетном строении. Каждый автомобиль имеет 7 степеней свободы, включая кузов с тремя степенями свободы (вертикальное перемещение центра тяжести и два угловых относительно продольной и поперечной горизонтальных осей) и четыре колеса (с одной степенью свободы по вертикали каждый). Динамику системы «вантовый мост + колонна автомобилей» можно исследовать, составив сначала систему трех матричных дифференциальных уравнений динамического равновесия, используя принцип Даламбера. Первое соответствует колебани-

ям кузовов активных автомобилей, второе – их колес, третье – вантового моста. К системе уравнений динамического равновесия добавлены уравнения совместности перемещений кузова, рессор и колес, а также колес, шин и проезжей части вантового моста. Перемещения рессор и шин представлены дифференциальными уравнениями как для вязкоупругого элемента. Все дифференциальные уравнения движения кузова и колес каждого активного автомобиля и вантового моста преобразованы к интегральным уравнениям Вольтерра первого рода [8], затем из уравнений совместности деформаций рессор и шин, исключив основные перемещения кузовов активных автомобилей и вантового моста, получены интегральные уравнения относительно усилий в рессорах и шинах активных автомобилей:

$$(\mathbf{K}_r^\alpha + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{K}_a^\alpha \mathbf{\Pi} + \mathbf{K}_k^\alpha) \mathbf{x}_k^\alpha - \mathbf{K}_k^\alpha \mathbf{x}_s^\alpha = \mathbf{0} \quad (\alpha \in N_a); \\ -\mathbf{K}_k^\alpha \mathbf{x}_r^\alpha + (\mathbf{K}_s^\alpha + \mathbf{K}_k^\alpha) \mathbf{x}_k^\alpha + \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^N \mathbf{\Psi}_i^{\alpha T} \mathbf{K}_i \mathbf{\Psi}_i^\beta (\mathbf{x}_s^\beta + \mathbf{X}_{s0}^\beta) = \mathbf{0}, \quad (10)$$

где $\mathbf{x}_r^\alpha(\mathbf{x}_s^\alpha)$ – вектор отклонений от статических значений усилий в рессорах (шинах) автомобиля с порядковым номером α ; \mathbf{X}_{s0}^α – статические усилия в шинах, обусловленные весом кузова и колес; \mathbf{K}_a^α , \mathbf{K}_k^α , \mathbf{K}_r^α , \mathbf{K}_s^α – диагональные матричные интегральные операторы типа Вольтерра первого рода, определяющие перемещения кузова, колеса, рессоры и шины соответственно; \mathbf{K}_i – скалярный интегральный оператор типа Дюамеля, соответствующий i -й собственной форме упругой системы с учетом затухания; $\mathbf{\Pi}$ – матрица приведения усилий в рессорах к главным центральным осям кузова; $\mathbf{\Psi}_i^\alpha$ – матрица-строка ординат i -й собственной формы вантового моста в точках контакта упругой системы с шинами экипажа с номером α ; N_a – множество порядковых номеров активных экипажей; n – число учитываемых собственных форм; N – номер последнего активного на текущий момент экипажа. Буква « t » верхнего индекса указывает на операцию транс-

понирования. Количество скалярных уравнений и число неизвестных в системе (10) равно числу вязкоупругих элементов всех активных экипажей.

Интегральные уравнения (10) с применением кусочно-линейной интерполяции усилий в рессорах \mathbf{x}_r^α и шинах \mathbf{x}_S^α сводятся к рекуррентной системе алгебраических уравнений, в результате решения которой получаем для каждого фиксированного момента времени значения усилий в рессорах и шинах каждого активного автомобиля. Имея эти значения, получаем коэффициенты разложения узловых линий складки по собственным формам, что позволяет для каждого момента времени получить эпюру перемещений узловых линий пролетного строения или, например, график изменения во времени перемещений группы точек характерного поперечного сечения. При малой скорости движения колонны автомобилей наибольшие перемещения характерного сечения оказываются во время движения первых автомобилей в колонне, затем по мере продвижения колонны по пролетному строению колебания происходят с меньшими амплитудами относительно статического состояния. Если колонна автомобилей длиннее пролетного строения моста и первый ее автомобиль уже достиг конца моста, то могут возникнуть резонансные колебания моста при так называемой критической скорости, при которой колонна проходит дистанцию между

смежными автомобилями за время, равное периоду свободных колебаний пролетного строения.

Следует отметить, что левая часть дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи содержит периодические во времени коэффициенты, период которых равен отношению шага регулярности колонны к ее скорости движения. Поэтому общее решение неоднородной системы рассматривается как вынужденные параметрические колебания, т.е. как сумма параметрических [9] и вынужденных колебаний. Однако, превалируют вынужденные колебания, в результате чего амплитуды в резонансном состоянии возрастают во времени по линейному закону, а не по экспоненте при параметрических колебаниях.

Пример. В качестве примера рассмотрим расчетную схему вантового моста (рис. 1). Балка жесткости представлена неразрезной стальной складкой с пролетами 96 м. и 48 м., шириной 12 м. с шестью ребрами жесткости, ее узловые линии пронумерованы (рис. 2). Абсолютно жесткие поперечные диафрагмы расположены в местах прикрепления ванты с шагом 24 м. Материал балки жесткости – сталь ($E=2.06e08$ КПа, $\rho=7.85$ т/м³). Толщина листов 0.035 м. Пилон из железобетона ($E=3.07e07$ КПа, $A=6.25$ м², $J_x=5.875$ м⁴, $J_y=11.75$ м⁴, $\rho=2.45$ т/м³). Площадь сечения каждой ванты – 0.09 м², $E=1.95e08$ КПа.

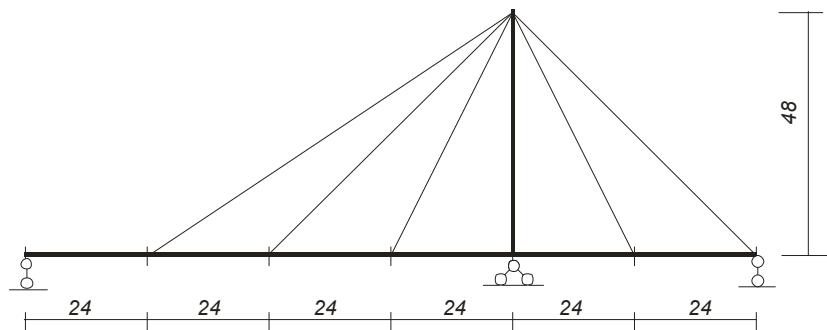


Рис. 1. Расчетная схема вантового моста, фасад

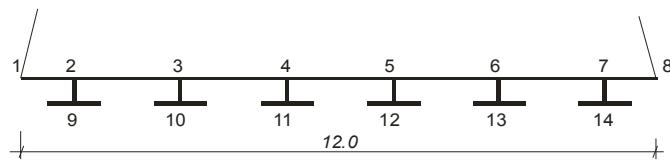


Рис. 2. Поперечное сечение

На рисунке 3 показаны узловые линии балки жесткости первых шести собственных форм вантового моста. В нечетных собственных формах узловые линии соответствуют изгибу балки жесткости в вертикальной плоскости симметрично относительно продольной оси моста, в четных – деформациям кручения. Как видно из рисунков, все собственные формы в сечении с пилоном имеют вертикальные перемещения равные нулю. Собственным формам соответствуют собственные

частоты (рад/сек): $\omega_1 = 1,312$, $\omega_2 = 1,588$, $\omega_3 = 1,735$, $\omega_4 = 1,825$, $\omega_5 = 1,884$, $\omega_6 = 1,933$. Критической назовем скорость v^* , при которой один автомобиль успевает преодолеть за половину основного периода свободных колебаний вантового моста расстояние, равное длине пролетного строения.

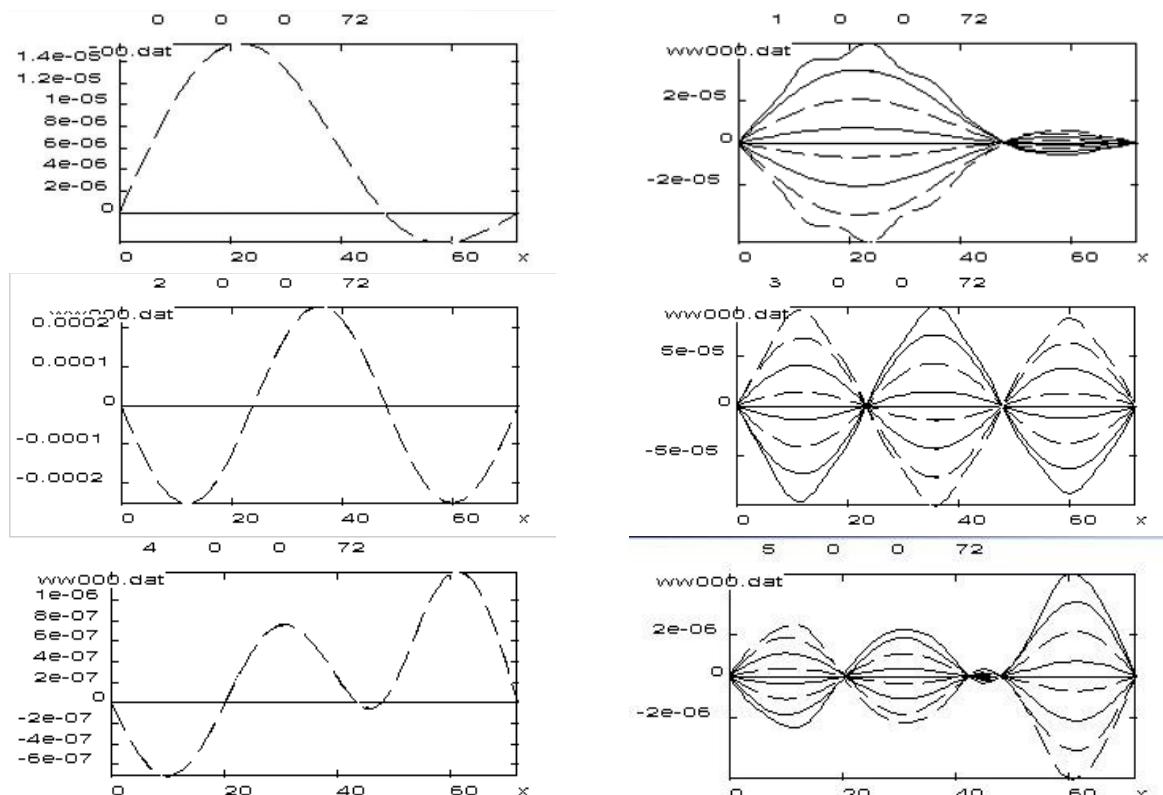


Рис. 3. Первые шесть собственных форм вантового моста

Колонна состоит из 21-го одинакового грузового автомобиля и движется вдоль узловых линий 2 и 3. Параметры каждого автомобиля в колонне приняты как в [5, с.165]. База автомобиля 4.0 м. Расстояние между центрами следующих друг за другом автомобилей равно 18.0 м. Отметим, что при скорости $v^{**} = 0.125v^*$ колонна продвигается на шаг регулярности за половину основного периода свободных колебаний.

На рисунках 4 и 5 приведены виброграммы точек, расположенных на узловых линиях 2 и

3 в среднем поперечном сечении складки (балки жесткости), при различных постоянных скоростях движения колонны. При входе колонны на пролетное строение, когда первый автомобиль еще не достиг конца пролетного строения, наблюдаются неуставновившиеся колебания, но после них на рисунке 4 можно видеть биения, а на рисунке 5 неустойчивость колебаний с наибольшим прогибом. Все вычисления выполнены с учетом диссипации энергии (для складки логарифмический декремент равен 0.01).

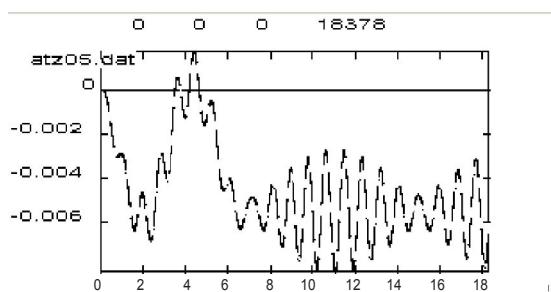


Рис. 4. $v = 0.0742178 v^*$

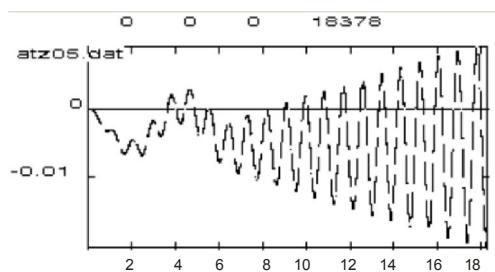


Рис. 5. $v = 0.08203125v^*$

Резонансные кривые – графики максимальных прогибов в зависимости от параметра скорости движения регулярной колонны – представлены на рисунке 6. Параметр скорости отсчитывается по горизонтальной оси так $32v/v^{**}$. Когда первый автомобиль еще не достиг конца пролетного строения, соответствуют графики 3 и 4, на следующем этапе движения – графики 1 и 2. Графики 1 и 3 рассчитаны при логарифмическом декременте, равном 0.01, а графики 2 и 4 – 0.16. Интересно отметить, что при скорости $v = 0.0742178 v^*$ (рис.4) коэффициент динамичности (отношение максимального прогиба к статическому) равен 1,479. Для оценки влияния диссипации на рисунке 7 приведена виброграмма при декременте, равном 0.16, (сравнить с рис. 5). Следует отметить, что для снижения значительных резонансных колебаний автодорожных вантовых мостов требуется устанавливать дополнительные демпфирующие устройства.

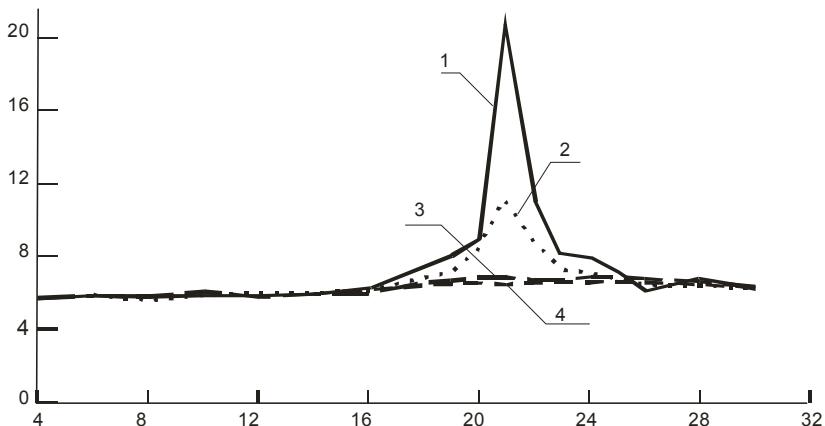


Рис. 6. Максимальные прогибы (мм) в среднем сечении складки в зависимости от параметра скорости колонны

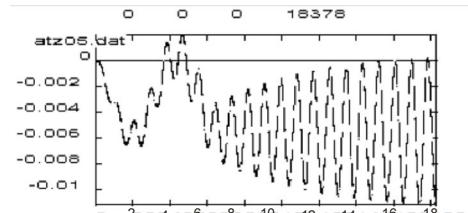


Рис. 7. $v=0.08203125v^*$

Максимальные прогибы в сечении посередине балки жесткости (складки) значительно зависят от декремента колебаний (рис. 8). Чем больше декремент, тем меньше амплитуды колебаний и соответственно меньше динамические прогибы.

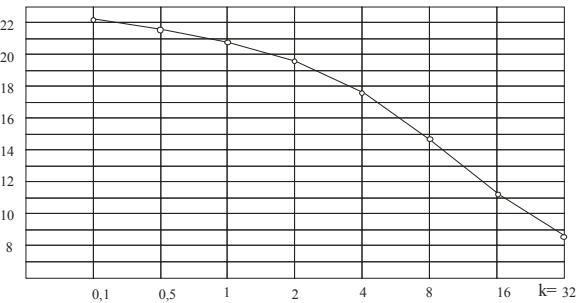


Рис. 8. Динамический максимальный прогиб (мм) в зависимости от декремента $\Delta = 0.01 * k$

Библиографический список

1. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
2. Болотин, В.В. Статистические методы в строительной механике / В.В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1965. – 280 с.
3. Смирнов, А.Ф. Расчет сооружений с применением вычислительных машин / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1964. – 380 с.
4. Сафронов, В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку / В.С. Сафронов. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983. – 196 с.
5. Кадисов, Г.М. Динамика и устойчивость сооружений: учебное пособие – 2-е изд. / Г.М. Кадисов. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 272 с.
6. Иванченко, И.И. Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные, подвижные, сейсмические и ударные нагрузки / И.И. Иванченко. – М.: Наука, 2011. – 574 с.
7. Гулд, С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях / С. Гулд. – М.: Мир, 1970. – 328 с.
8. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544с.
9. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем/ под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

**DYNAMICS OF VANTOVY
AVTODOROZHNY BRIDGE**

G.M. Kadisov

Abstract. The task about fluctuations of the cable-stayed bridge presented by a fold with absolutely rigid cross diaphragms, a pole and guys together with a regular column of the trucks moving with a constant speed is investigated by the numerical decision of system of the integrated equations of Voltaire of the first sort. On a concrete example possibility of a resonance at the movement of a column with a speed equal to the regularity step relation to the period of own form of the bridge is shown, taking into account frequency-dependent internal friction.

Keywords: fold, pole, guys, column of cars, resonance.

References

1. Panovko Ja.G., Gubanova I.I. *Ustoichivost' i kolebanija up-rugih sistem* [Ustoichivost and fluctuations of elastic systems]. Moscow, Nauka, 1987. 352 p.
2. Bolotin V.V. *Statisticheskie metody v stroitel'noj mehanike* [Statistical methods in construction mechanics]. Moscow, Strojizdat, 1965. 280 p.
3. Smirnov A.F., Aleksandrov A.V., Lashhenikov B.Ja., Shaposhnikov N.N. *Raschet sooruzhenij s prime-neniem vychislitel'nyh mashin* [Calculation of constructions with application of computers]. Moscow, Strojizdat, 1964. 380 p.
4. Safronov V.S. *Raschet visjachih i vantovyh mostov na podvizhnuju nagruzku* [Calculation of suspension and cable-stayed bridges on mobile loading]. Voronezh: Izd-vo VGU, 1983. 196 p.
5. Kadisov G.M. *Dinamika i ustoichivost' sooruzhenij: uchebnoe posobie* [Dinamika and stability of constructions: manual]. Moscow, Izd-vo ASV, 2007. 272 p.
6. Ivanchenko I.I. *Dinamika transportnyh sooruzhenij: vysokoskorostnye, podvizhnye, sejsmicheskie i udarnye nagruzki* [Dinamika of transport constructions: high-speed, mobile, seismic and shock loadings]. Moscow, Nauka, 2011, 574 p.
7. Guld S. *Variacionnye metody v zadachah o sobstvennyh znachenijah* [Variation methods in tasks about own values]. Moscow, Mir, 1970. 328 p.
8. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral'nye uravnenija. Metody, algoritmy, programmy. Spravochnoe posobie* [Integrated equations. Methods, algorithm, programs]. Kiev: Naukova dumka, 1986. 544 p.
9. *Vibracii v tehnike: Spravochnik* [Vibrations in equipment: Reference book]. Т. 1. Kole-banija linejnyh sistem, pod red. V.V. Bolotina. 1978. 352 p.

Кадисов Григорий Михайлович (Россия, г. Омск) – доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВПО «СибАДИ» (646800, г. Омск, пр. Мира, 5).

Kadisov Grigory Mikhaylovich (Russian Federation, Omsk) – doctor of technical science, professor of the The Siberian automobile and highway academy (SIBADI) (646800, Omsk, Mira Ave., 5).