

Научная статья
 УДК 624.046.3
 DOI: <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2025-22-5-844-857>
 EDN: VCASDS



УЧЁТ ЖЁСТКОСТИ ОПОРНЫХ УЗЛОВ В РАСЧЁТАХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ СИММЕТРИЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

М.А. Ступин¹ ✉, С.А. Макеев², А.А. Комлев²
¹ АО «Судостроительный завод им. Б.Е. Бутомы»,
 г. Керчь, Россия

² Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ),
 г. Омск, Россия

✉ ответственный автор
 misha.stupin2014@yandex.ru

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена вопросам механики тонкостенных стержней. В статье приводится решение уравнения В.З. Власова для изгиба с кручением тонкостенного стержня с двумя осями симметрии, учитывающее влияние жёсткости (податливости) опорных узлов.

Введение. Описывается текущее состояние вопроса расчётов тонкостенных стержней при поперечном изгибе с кручением.

Материалы и методы. Приводится решение системы дифференциальных уравнений устойчивости плоской формы изгиба В.З. Власова для тонкостенных стержней при поперечном изгибе с кручением с учётом влияния жёсткости (податливости) опорных узлов. Исходные уравнения В.З. Власова для изгиба с кручением тонкостенного стержня с двумя осями симметрии преобразовываются в правую систему координат. Далее из двух дифференциальных уравнений В.З. Власова получается система из 12 уравнений для всех расчётных усилий и деформаций в тонкостенном стержне. Также получены граничные условия, учитывающие связь между усилиями и деформациями в опорном сечении. Далее в работе приведены результаты решения указанной системы уравнений методом Эйлера.

Результаты. Получено решение системы уравнений В.З. Власова для устойчивости тонкостенных стержней при поперечном изгибе с учётом жёсткости (податливости) опорных узлов методом Эйлера и общий вид функции угла поворота поперечного сечения. Решение получено для стержней с любыми опорными узлами, от чистого шарнира до абсолютно жёстких узлов. В разделе приведены результаты численной верификации и сделаны выводы о точности полученного решения. При верификации рассмотрен частный случай балок различного сечения с абсолютно жёсткими опорными узлами. Разница между численным решением в ПК «ЛИРА-САПР» и решением, предлагаемым в статье, находится в пределах 12%.

Обсуждение и заключение. Сделаны выводы о точности разработанной математической модели. Разница вызвана точностью определения моментов инерции сечения на чистое кручение и жёсткости опорных узлов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: общая устойчивость, механика тонкостенных стержней, математическое моделирование, общая устойчивость балок, расчёт балок, изгиб с кручением

БЛАГОДАРНОСТИ: авторы выражают благодарность редакции журнала «Вестник СибАДИ» и рецензентам статьи.

Статья поступила в редакцию 23.08.2025; одобрена после рецензирования 08.10.2025; принята к публикации 21.10.2025.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Для цитирования: Ступин М.А., Макеев С.А., Комлев А.А.. Учёт жёсткости опорных узлов в расчётах тонкостенных стержней симметричного сечения при поперечном изгибе с кручением // Вестник СибАДИ. 2025. Т. 22, № 5. С. 844-857. <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2025-22-5-844-857>

© Ступин М.А., Макеев С.А., Комлев А.А., 2025



Контент доступен под лицензией
 Creative Commons Attribution 4.0 License.

Original article

DOI: <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2025-22-5-844-857>

EDN: VCASDS

BEARING JOINT RIGIDITY IN DESIGNING THIN-WALLED BEAMS WITH TWO AXES OF SYMMETRY WHEN BENDING WITH TORSION

Mikhail A. Stupin¹ ✉, Sergey A. Makeev², Andrey A. Komlev²

¹B.E. Butoma Shipbuilding Plant JSC,
Kerch, Russia

²The Siberian State Automobile and Highway University (SibADI),
Omsk, Russia

✉ corresponding author
misha.stupin2014@yandex.ru

ABSTRACT

The article is devoted to the mechanics of thin-walled beams. A solution to the Vlasov equation for bending with torsion of a thin-walled beam with two axes of symmetry is provided, the effect of bearing joint rigidity being taken into account.

Introduction. The current state of the issue of designing thin-walled beams subjected to transverse bending with torsion is described.

Materials and methods. The solution of the system of differential equations of stability of the plane bending form of V.Z. Vlasov for thin-walled beams under transverse bending with torsion is presented, the effect of bearing joint rigidity being taken into account. The original equations of V.Z. Vlasov for bending and torsion of a thin-walled beam with two axes of symmetry are transformed into a right-hand coordinate system. Next, from two differential equations of V.Z. Vlasov, a system of 12 equations is obtained for all calculated forces and deformations in a thin-walled beam. Boundary conditions were also obtained that take into account the relationship between forces and deformations in the support section. The results of solving the specified system of equations using the Euler method are presented.

Results. The solution of Vlasov system of equations for the stability of thin-walled beams under transverse bending is obtained, taking into account the rigidity (malleability) of the support nodes by the Euler method and the general form of the function of the angle of rotation of the cross section. The solution is obtained for beams with any support nodes, from a pure hinge to absolutely rigid nodes. The paper presents the results of numerical verification and draws conclusions on the accuracy of the obtained solution. During verification, a special case of beams of various cross-sections with absolutely rigid support units was considered. The difference between the numerical solution in the LIRA-CAD PC and the solution proposed in the article is within 12 per cent.

Discussion and conclusions. Conclusions have been drawn on the accuracy of the developed mathematical model. The difference is caused by the accuracy in determining the moments of inertia of the section for pure torsion and the stiffness of the support units.

KEYWORDS: general stability, thin-walled beam mechanics, mathematical modeling, general stability of beams, beam calculation, bending with torsion

The article was submitted: August 23, 2025; approved after reviewing: October 08, 2025; accepted for publication: October 21, 2025.

All authors have read and approved the final manuscript.

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

For citation. Stupin M.A., Makeev S.A., Komlev A.A. Bearing joint rigidity in designing thin-walled beams with two axes of symmetry when bending with torsion. *The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. 2025; 22 (5): 844-857. <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2025-22-5-844-857>

© Stupin Mikhail A., Makeev Sergey A., Komlev Andrey A., 2025



Content is available under the license
Creative Commons Attribution 4.0 License.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы общей устойчивости балок при изгибе в плоскости максимальной жёсткости впервые рассмотрены А.Г. Мичеллом в 1899 г.¹ При этом Мичелл рассматривал балки, длина которых намного больше высоты сечения, и влиянием жёсткости поперечных плоскостей изгиба на общую устойчивость можно пренебречь.

Л. Прандтль в работе² также рассматривал отличные от большинства применяемых в строительстве профилей, а именно – тонкие пластинки.

Однако большинство тонкостенных балок, используемых в реальных конструкциях, имеют такие размеры, при которых длину нельзя считать бесконечно большой, а влиянием поперечных плоскостей пренебречь.

Впервые вопросы общей устойчивости тонкостенных стержней, и в частности двутавровых балок, рассмотрены С.П. Тимошенко³. В работе С.П. Тимошенко «Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости её наибольшей жёсткости»². С.П. Тимошенко получены выражения, позволяющие определить критическую силу для частных случаев (консольная балка, случай чистого изгиба, равномерно распределённая нагрузка).

В работе⁵ В.З. Власов обобщает представления С.П. Тимошенко на все тонкостенные стержни. В.З. Власовым получена система уравнений для равновесия тонкостенного стержня с несимметричным сечением при одновременном сжатии и изгибе в двух плоскостях внешней нагрузкой [с. 369 в работе⁵], а также система уравнений для изгиба с кручением тонкостенного стержня с двумя осями симметрии.

Работы [1, 2] посвящены исследованию механики холодногнутых тонкостенных стержней. В статье [3] рассматривается конечно-элементный расчёт тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории В.И. Сливкера. Статьи [4]-[5] посвящены расчёту НДС тонкостенных стержней методом асимптотического расщепления. В работе [6] рассматривается

расчёт изгиба и стеснённого кручения тонкостенных стержней произвольного сечения.

В работе [7] исследуются вопросы расчёта композиционных тонкостенных стержней. В статье [8] изучаются вопросы расчёта тонкостенных стержней с учётом сдвига, в [9] – методы расчета перфорированных тонкостенных стержней. Статья [10] посвящена вопросам моделирования разрушения тонкостенных элементов при изгибе в упругопластической постановке.

В статье [17] авторами представлена уточнённая стержневая модель расчёта балок на общую устойчивость. Работа [12] посвящена исследованию стеснённого изгиба с кручением тонкостенных стержней при неравномерно распределённой нагрузке. В статье [13] рассматриваются вопросы прочности композиционных тонкостенных балок. В статье [14] авторы проводят сравнение стержневой и оболочечной моделей расчёта тонкостенных балок. В работе [15] рассматриваются вопросы параметрической оптимизации конструкций из тонкостенных стержней.

В статье [16] авторами описывается эксперимент, посвященный образованию трещин в композиционных тонкостенных стержнях. Статья [17] посвящена вопросам расчёта НДС тонкостенных стержней, выполненных из анизотропных материалов.

Статья [18] посвящена уточнению методик расчёта напряжений при стеснённом изгибе с кручением балок швеллерного сечения, статья [19] – вопросам численного моделирования стержней из композиционных материалов.

В работе [20] исследуется упругость и прочность тонкостенных стержней, изготовленных с применением аддитивных технологий.

В качестве обобщения приведенных материалов сделан вывод о том, что вопросы влияния жёсткости опорных узлов на общую устойчивость тонкостенных стержней остаются не вполне изученными в современной строительной механике.

Существующие российские нормы предписывают проверять общую устойчивость балок по методикам, основанным на теории тонко-

¹Michell A.G. Elastic stability of elastic beams under transverse forces // Philosophic magazine and journal of science, London-Edinburg-Dublin, Series 5. 1899; 48 (292): 298-309.

²Prandtl L. Kipperscheinungen. Ein Fall von instabilen elastischen Gleichgewicht. Dissertation der Universitat Munehen / L. Prandtl. Nurnberg. 1900. 75

³Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Л., М.: Гостехиздат, 1946. 532 с.

⁴Тимошенко С.П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 810 с.

⁵Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 586 с.

стенных стержней В.З. Власова и С.П. Тимошенко. При этом методика, приведённая в СП 16.13330.2017⁶, представляет собой проверку напряжений в балке при действующих нагрузках с учётом влияния начальных несовершенств (начальной погиби и эксцентриситета приложения нагрузки) и геометрической нелинейности⁷ (п. 7.2.3 СП 294.1325800.2017 с изм. № 1, 2, 3).

Так как система уравнений В.З. Власова для изгиба с кручением тонкостенного стержня не имеет общего аналитического решения, действующие нормы содержат ограниченное число вариантов схем закрепления и нагружений балок. Так, в приложении Ж к СП 16.13330.2017 с Изм. 1, 2, 3, 4 содержится 9 вариантов нагружения для двутавровой балки симметричного сечения с консольным и шарнирным опиранием.

Однако в существующих нормах не рассматриваются балки с жёсткими опорными узлами, а также не учитывается жёсткость опорных узлов как таковых.

В данной работе рассматривается решение системы уравнений устойчивости плоской формы изгиба В.З. Власова тонкостенного стержня, учитывающее угловую жёсткость опорных узлов. Полученная система уравнений позволяет определять НДС стержней с возможностью варьирования угловых жесткостей опорных узлов от нуля (шаровой/цилиндрический шарнир) до бесконечности (жест-

кое закрепление). Также в работе приведены результаты расчёта для частного случая (абсолютно жёстких опорных узлов) и сопоставление полученных результатов с расчётом в ПК «ЛИРА-САПР».

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В статье задача общей устойчивости тонкостенного стержня рассматривается как задача расчёта на изгиб с кручением с учётом геометрической нелинейности.

Рассмотрим однопролётную балку с опорными узлами, имеющими компоненты угловой жёсткости K_{Ux} , K_{Uy} , K_{Uz} и сопротивление деформации K_{Bz} (рисунок 1). На рисунке 1 опорные узлы показаны условно и включают в себя четыре компоненты жёсткости. Неподвижные оси обозначены как X , Y , Z . При этом ось, проходящую через центры масс сечений стержня, обозначена как z , а главные оси сечений как x и y . Моменты инерции сечения обозначены как I_x , I_y , I_t , I_ω , модуль упругости материала как E , а модуль сдвига как G .

В недеформированном состоянии (рис. 2(а)) оси x , y и z параллельны неподвижным осям X , Y , Z , а в деформированном (рис. 2(б)) между парами осей $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ образуются углы UX , UY , UZ . При этом сечения поворачиваются вокруг местных осей x , y , z на угол Ux , Uy , Uz . Перемещения центра тяжести сечения стержня обозначим как ΔX , ΔY .

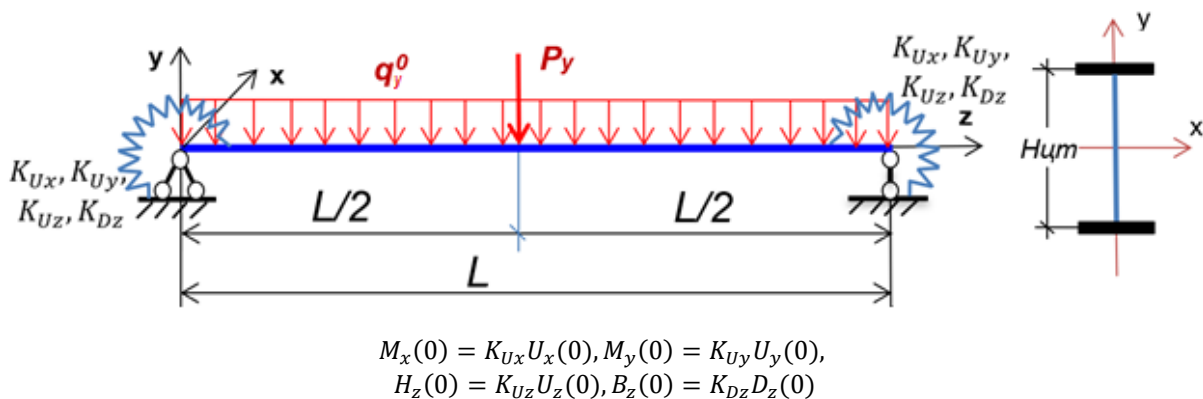


Рисунок 1 – Расчётная схема балки в правой системе координат
Источник: составлено авторами.

Figure 1 – Graphical representation of a beam in the right-hand coordinate system
Source: compiled by the authors.

⁶ СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*» (с Поправкой, с изменением № 1,2,3,4).

⁷ СП 294.1325800.2017 с изм. № 1,2,3 «Конструкции стальные. Правила проектирования».

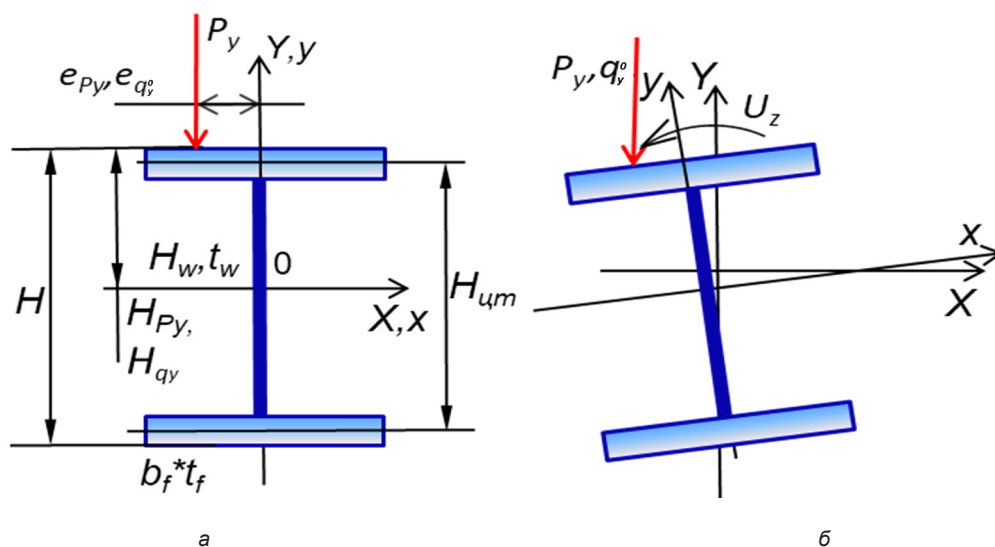


Рисунок 2 – Поперечное сечение тонкостенного стержня в середине пролёта:
а – недеформированное состояние; б – деформированное состояние
Источник: составлено авторами.

Figure 2 – Thin-walled beam cross-section in the middle part of the span
a – unstrained state; b – under deformation
Source: compiled by the authors.

Обозначим как K_{U_x} , K_{U_y} , K_{U_z} угловые жесткости опорных узлов (изгибающие и крутящий моменты, которые нужно приложить для поворота опорных сечений на единичный угол). Обозначим как K_{D_z} бимомент, который возникает в опорном сечении при единичной деформации.

Обозначим как P_y , q_y^0 сосредоточенную и равномерно распределённую поперечную нагрузку вдоль оси Y , e_{P_y} , e_{q_y} – эксцентриситеты приложения соответствующей нагрузки, H_{P_y} , $H_{q_y} = \pm H/2$ – высота приложения соответствующей нагрузки. При этом за положительное направление нагрузки q_y^0 , P_y принято $-Y$.

Для балок, нагруженных только поперечной нагрузкой в плоскости максимальной жёсткости, математическая модель устойчивости плоской формы изгиба В.З. Власова в левой системе координат имеет следующий вид [с. 375 в работе⁵], система уравнений (3.3)):

$$\begin{cases} EI_y \Delta X^{IV} + (M_x U_z(z))'' = 0, \\ EI_w U_z(z)^{IV} - GI_t U_z(z)'' + q_y^0 H_{q_y^0} U_z(z) + e_{q_y^0} q_y^0 + M_x \Delta X'' = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы перевести систему уравнений (1)-(2) для записи в правой системе координат, необходимо произвести следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \Delta X^{IV}_{\text{прав.}} &= \Delta X^{IV}_{\text{лев.}}, \\ \Delta X''_{\text{прав.}} &= \Delta X''_{\text{лев.}}, \\ M_{x\text{прав.}} &= -M_{x\text{лев.}}, \\ U_z(z)_{\text{прав.}} &= -U_z(z)_{\text{лев.}}, \\ U_z(z)^{IV}_{\text{прав.}} &= U_z(z)^{IV}_{\text{лев.}}, \\ U_z(z)''_{\text{прав.}} &= U_z(z)''_{\text{лев.}} \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (1)-(2) примет вид

$$\begin{cases} EI_y \Delta X^{IV} + (M_x U_z(z))'' = 0, \\ EI_w U_z(z)^{IV} - GI_t U_z(z)'' - q_y^0 H_{q_y^0} U_z(z) - e_{q_y^0} q_y^0 + M_x \Delta X'' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Проинтегрировав дважды уравнение (3), получим следующее выражение:

$$EI_y \Delta X(z)'' = -M_x(z) \cdot U_z(z) - C_1 z - C_2, \quad (5)$$

$$M_y(z) = M_x(z) \cdot U_z(z) + C_1 z + C_2. \quad (6)$$

Для определения констант интегрирования C_1 и C_2 необходимо 2 граничных условия. Первым условием запишем для изгибающего момента в опорном узле:

$$M_y(0) = M_x(0) \cdot U_z(0) + C_2, \quad (7)$$

$$C_2 = M_y(0) - M_x(0) \cdot U_z(0). \quad (8)$$

Для определения параметра C_1 необходимо задать условие для поперечной силы Q_x . Поперечная сила Q_x определяется как

$$Q_x = M_y(z)' = Q_y(z) \cdot U_z(z) + M_x(z) \cdot U_z(z)' + C_1. \quad (9)$$

В принятой расчётной схеме на балку в середине пролёта действует сила $P_y \sin\left(U_z\left(\frac{L}{2}\right)\right) = P_y U_z\left(\frac{L}{2}\right)$. Так как усилия в левой и правой частях балки распределяются одинаково относительно середины пролёта, поперечные силы $Q_x\left(\frac{L}{2} - dz\right)$ и $Q_x\left(\frac{L}{2} + dz\right)$ отличаются только знаком. Поэтому усилие $Q_x\left(\frac{L}{2} - dz\right)$ определится как

$$Q_x\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P_y}{2} U_z\left(\frac{L}{2}\right), \quad (10)$$

$$\frac{P_y}{2} U_z\left(\frac{L}{2}\right) = Q_y\left(\frac{L}{2}\right) \cdot U_z\left(\frac{L}{2}\right) + M_x\left(\frac{L}{2}\right) \cdot U_z\left(\frac{L}{2}\right)' + C_1. \quad (11)$$

Отметим, что так как в середине пролёта достигается максимальный угол поворота U_z , производная $U_z\left(\frac{L}{2}\right)'$ равна 0.

$$\frac{P_y}{2} U_z\left(\frac{L}{2}\right) = Q_y\left(\frac{L}{2}\right) \cdot U_z\left(\frac{L}{2}\right) + C_1. \quad (12)$$

В используемой расчётной схеме усилие $Q_y\left(\frac{L}{2}\right)$ определится как

$$Q_y\left(\frac{L}{2}\right) = Q_y(0) + q_y \frac{L}{2} = -\frac{P_y}{2} - q_y \frac{L}{2} + q_y \frac{L}{2} = -\frac{P_y}{2}. \quad (13)$$

Подставим (12) в (13) и получим

$$\frac{P_y}{2} U_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P_y}{2} \cdot U_z\left(\frac{L}{2}\right) + C_1. \quad (14)$$

$$C_1 = 0.$$

В итоге уравнение (3) примет вид

$$M_y(z) = M_x(z) \cdot U_z(z) + (M_y(0) - M_x(0) U_z(0)). \quad (15)$$

Поперечная сила $Q_x(z)$ выразится как

$$Q_x(z) = M_y(z)' = Q_y(z) \cdot U_z(z) + M_x(z) \cdot U_z(z)'. \quad (16)$$

Далее в уравнении (4) заменим $\Delta X(z)''$ на $-\frac{M_y(z)}{EI_y}$:

$$EI_w U_z(z)^{IV} - GI_t U_z(z)'' - q_y^0 H_{q_y^0} U_z(z) - e_{q_y^0} q_y^0 - \frac{M_x M_y(z)}{EI_y} = 0. \quad (17)$$

Система уравнений (3)-(4) принимает вид:

$$\begin{cases} M_y(z) = M_x(z) \cdot U_z(z) + (M_y(0) - M_x(0)U_z(0)), \\ EI_w U_z(z)^{IV} - GI_t U_z(z)'' - q_y^0 H_{q_y^0} U_z(z) - e_{q_y^0} q_y^0 - \frac{M_x M_y(z)}{EI_y} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

$$(19)$$

Подставив в уравнение (15) в уравнение (17), можно получить однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка относительно угла закручивания:

$$[EI_\omega] U_z(z)^{IV} - [GI_t] U_z(z)'' - \frac{M_x(z)^2}{EI_y} U_z(z) - \frac{M_x(z)}{EI_y} (M_y(0) - M_x(0)U_z(0)) - q_y^0 H_{q_y^0} U_z(z) - e_{q_y^0} q_y^0 = 0. \quad (20)$$

Обозначим производную угла поворота $U_z(z)'$ как $D_z(z)$, внутренний бимомент $-EI_\omega U_z(z)''$ как $B_z(z)$, внутренний крутящий момент как $H_z(z)$.

В соответствии с принятыми обозначениями выразим из уравнения (20) $H_z(z)'$:

$$H_z(z) = GI_t \cdot U_z(z)' - EI_\omega U_z(z)''', \quad (21)$$

$$H_z(z)' = GI_t \cdot U_z(z)'' - EI_\omega U_z(z)^{IV}, \quad (22)$$

$$-EI_\omega U_z(z)^{IV} = -[GI_t] U_z(z)'' + \frac{M_x(z)^2}{EI_y} U_z(z) + \frac{M_x(z)}{EI_y} (M_y(0) - M_x(0)U_z(0)) - q_y^0 H_{q_y^0} U_z(z) - e_{q_y^0} q_y^0, \quad (23)$$

$$H_z(z)' = -\left(\frac{M_x(z)^2}{EI_y} + q_y^0 H_{q_y^0}\right) U_z(z) - \frac{M_x(z)}{EI_y} (M_y(0) - M_x(0)U_z(0)) + e_{q_y^0} q_y^0. \quad (24)$$

Далее запишем выражения для определения $D_z(z)$, $B_z(z)$, $H_z(z)$:

$$dH_z(z) = H_z(z)' dz, \quad (25)$$

$$dB_z(z) = (H_z(z) - GI_t U_z(z)') dz, \quad (26)$$

$$dD_z(z) = \frac{-B_z(z)}{EI_\omega} dz, \quad (27)$$

$$dU_z(z) = D_z(z) dz. \quad (28)$$

Далее запишем выражения для прогиба стержня по оси Y:

$$\frac{Y'''}{EI_x} = Q_y(z) = Q_y(0) + q_y z = -\frac{(q_y L + P_y)}{2} + q_y z, \quad (29)$$

$$\frac{Y''}{EI_x} = M_x(z) = M_x(0) - \frac{(q_y L + P_y)}{2} z + \frac{q_y z^2}{2}, \quad (30)$$

$$-Y' = U_x(z) = U_x(0) + \frac{M_x(0)}{EI_x}z - \frac{(q_yL + P_y)}{4EI_x}z^2 + \frac{q_yz^3}{6EI_x}, \quad (31)$$

$$Y = -U_x(0)z + \frac{M_x(0)z^2}{2EI_x} - \frac{(q_yL + P_y)}{12EI_x}z^3 + \frac{q_yz^4}{24EI_x}. \quad (32)$$

Тогда полная система уравнений для изгиба с кручением тонкостенного стержня (далее – система I) запишется как:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y'''}{EI_x} = Q_y(z) = Q_y(0) + q_yz = -\frac{(q_yL + P_y)}{2} + q_yz, \quad (27) \\ \frac{Y''}{EI_x} = M_x(z) = M_x(0) - \frac{(q_yL + P_y)}{2}z + \frac{q_yz^2}{2}, \quad (28) \\ -Y' = U_x(0) + \frac{M_x(0)}{EI_x}z - \frac{(q_yL + P_y)}{4EI_x}z^2 + \frac{q_yz^3}{6EI_x}, \quad (29) \\ Y = -U_x(0)z + \frac{M_x(0)z^2}{2EI_x} - \frac{(q_yL + P_y)}{12EI_x}z^3 + \frac{q_yz^4}{24EI_x}, \quad (30) \\ q_x(z) = q_y(z) \cdot U_z(z) + 2Q_y(z) \cdot U_z(z)', \quad (31) \\ Q_x(z) = Q_y(z) \cdot U_z(z) + M_x(z) \cdot U_z(z)', \quad (16) \\ M_y(z) = M_x(z) \cdot U_z(z) + (M_y(0) - M_x(0)U_z(0)), \quad (15) \\ dU_y(z) = \frac{M_y(z)}{EI_y}dz, \quad (32) \\ dX = -U_y(z)dz, \quad (33) \\ H_z(z)' = -\left(\frac{M_x(z)^2}{EI_y} + q_y^0 H_{q_y^0}\right)U_z(z) - \frac{M_x(z)}{EI_y}(M_y(0) - M_x(0)U_z(0)) + e_{q_y^0}q_y^0, \quad (22) \\ dH_z(z) = H_z(z)'dz, \quad (23) \\ dB_z(z) = (H_z(z) - GI_t U_z(z)')dz, \quad (24) \\ dD_z(z) = -\frac{B_z(z)}{EI_\omega}dz, \quad (25) \\ dU_z(z) = D_z(z)dz. \quad (26) \end{array} \right.$$

Для решения системы I необходимо определить следующие начальные параметры:

$$M_x(0), U_x(0), M_y(0), U_y(0), D_z(0), B_z(0), H_z(0), U_z(0).$$

Опорные узлы рассматриваемой балки имеют 4 вращательных степени свободы: $U_x(0), U_y(0), U_z(0), D_z(0)$. Связь между усилиями и деформациями в опорном узле выразится следующим образом:

$$M_x(0) = K_{U_x}U_x(0), \quad (27)$$

$$M_y(0) = K_{U_y}U_y(0), \quad (28)$$

$$U_z(0) = \frac{H_z(0)}{K_{U_z}}, \quad (29)$$

$$B_z(0) = K_{D_z}D_z(0). \quad (30)$$

С учётом уравнений (27) - (30) для решения системы необходимо определить четыре независимых начальных параметра:

$$U_x(0), U_y(0), D_z(0), H_z(0).$$

Для однозначного определения начальных параметров необходимо 4 условия. Для 1 формы потери устойчивости по условиям симметрии запишем следующие условия:

$$\Delta X(L) = 0, \quad (32)$$

$$U_z(L) = U_z(0) = \frac{H_z(0)}{K_{Uz}}, \quad (33)$$

$$D_z(L) = -D_z(0). \quad (34)$$

Начальный угол $U_x(0)$ можно однозначно определить из условия (32):

$$\begin{aligned} U_x(0) &= -\int_0^{\frac{L}{2}} M_x(z) dz = -\int_0^{\frac{L}{2}} \left(M_x(0) - \frac{(q_y L + P_y)}{2} z + \frac{q_y z^2}{2} \right) dz = \\ &= -\frac{K_{Ux} U_x(0) L}{2} + \frac{(q_y L + P_y)}{16} L^2 - \frac{q_y L^3}{48} \\ U_x(0) &= -\frac{K_{Ux} U_x(0) L}{2} + \frac{(q_y L + P_y)}{16} L^2 - \frac{q_y L^3}{48}, \\ U_x(0) \left(1 + \frac{K_{Ux} L}{2} \right) &= \frac{(q_y L + P_y)}{16} L^2 - \frac{q_y L^3}{48}, \\ U_x(0) &= \frac{L^2}{48} (2q_y L + P_y) / \left(1 + \frac{K_{Ux} L}{2} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, граничные условия $U_x(0)$, $U_y(0)$, $D_z(0)$, $H_z(0)$ определяются из условий (32), (33), (34), (35).

РЕЗУЛЬТАТЫ

Решение системы I проводилось методом Эйлера в табличном процессоре MS Excel. В ходе расчёта была определена критическая сила потери устойчивости для серии прокатных балок, представленных в таблице. Расчёты проводились для балок пролётом 6,0 м с жёсткими опорными узлами. Также были проведены проверочные расчёты в ПК «ЛИРА-САПР». В расчёте определялась критическая сила для балок, нагруженных без эксцентриситета и начальных несовершенств (критическая сила по Эйлеру), т.е. такая сила, при которой возможен резкий переход балки из плоской формы изгиба в состояние изгиба с кручением.

На рисунках 3, 4, 5, 6 показаны графики усилий и деформаций при изгибе с кручением для балки 10Б1 (строка 1 таблицы). Результаты приведены для усилия $P_y = 0,55$ т приложенного с эксцентриситетом $e_{py} = 5$ мм. Значения приведены для усилия меньшего, чем $P_{кр.} = 0,64$ т, т.к. при $e_{py} > 0$ и $P_y = P_{кр.}$ перемещения и усилия стремятся к бесконечности.

Таблица
Результаты расчёта
Источник: составлено авторами.

Table
Calculation results
Source: compiled by the authors.

№	Сечение	$P_{кр.}$ ЛИРА, т	$P_{кр.}$ расчёт, т	Погрешность расчёта ε , %
1	10Б1	0,63	0,64	-2.08
2	20Б2	5,25	5,72	-9.03
3	30Б2	13,77	14,56	-5.77
4	40Б2	57,68	59,97	-3.98
5	50Б2	68,98	76,90	-11.48

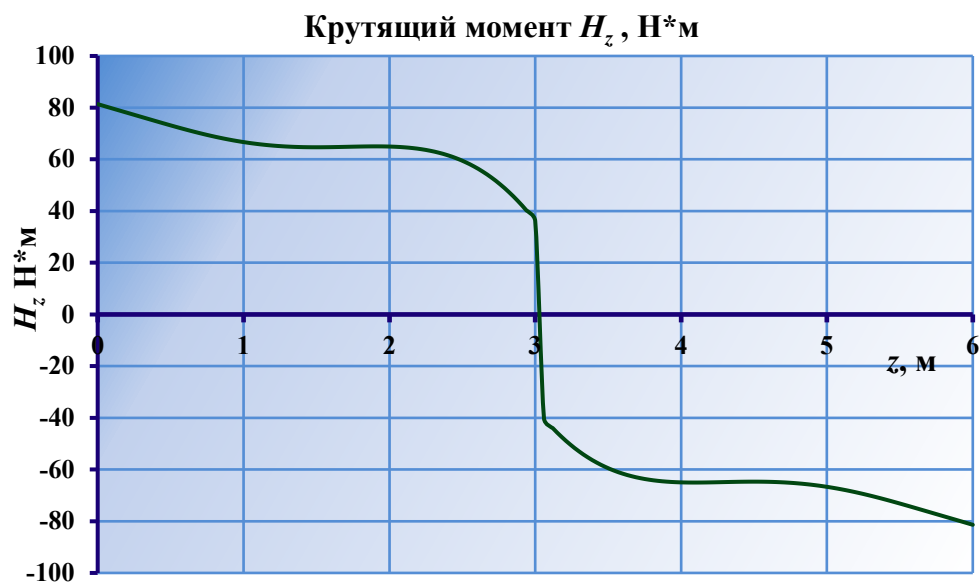


Рисунок 3 – График функции внутреннего крутящего момента в сечении
Источник: составлено авторами.

Figure 3 – Internal torque function for section
Source: compiled by the authors.

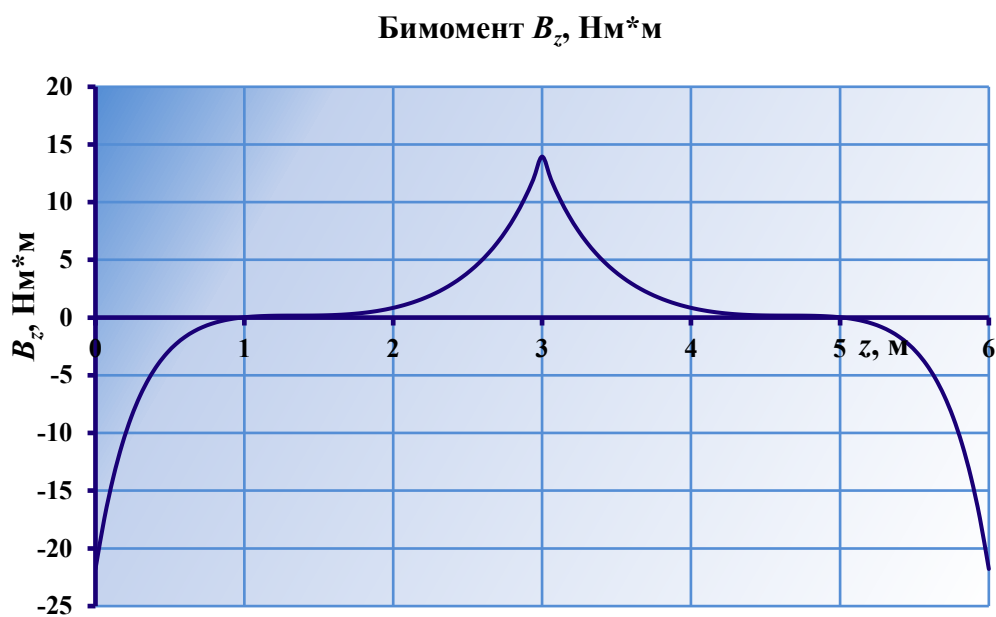


Рисунок 4 – График функции бимомента в сечении
Источник: составлено авторами.

Figure 4 – Graphical representation of bimoment function
Source: compiled by the authors.

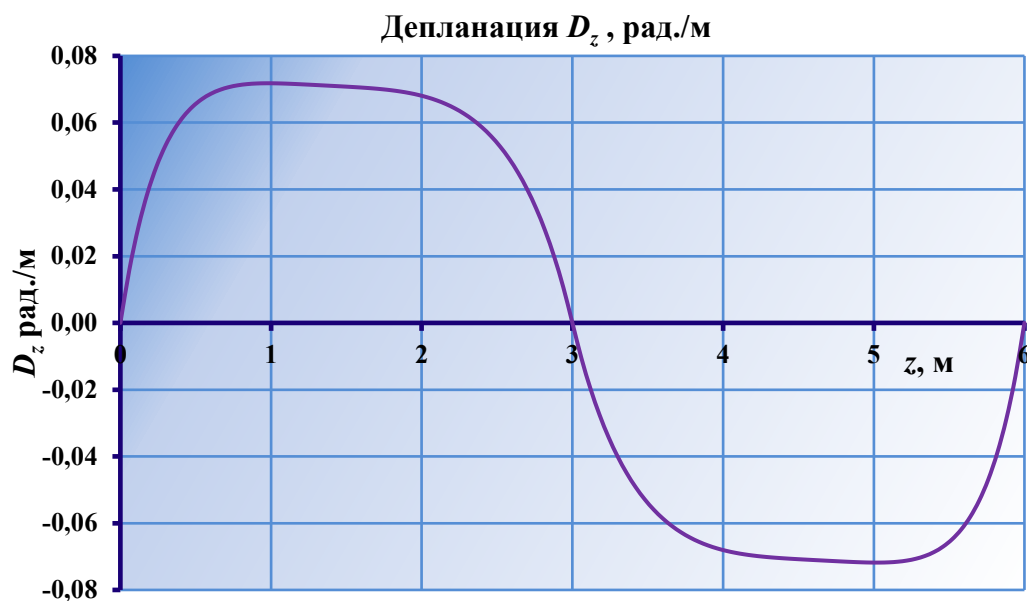


Рисунок 5 – График функции деформации сечения
Источник: составлено авторами.

Figure 5 – Function of cross-section distortion
Source: compiled by the authors.



Рисунок 6 – График функции угла закручивания сечения
Источник: составлено авторами.

Figure 6 – Function of section angular twist
Source: compiled by the authors.

ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведено решение системы дифференциальных уравнений устойчивости плоской формы изгиба В.З. Власова для тонкостенных стержней, учитывающее угловые жёсткости опорных узлов с возможностью варьирования жесткостей опор от нуля (шаровой/цилиндрический шарнир) до бесконечности (жесткое закрепление).

Получено дифференциальное уравнение четвертого порядка для угла поворота поперечного сечения тонкостенного стержня при изгибе с кручением, учитывающее жёсткость опорных узлов.

Также получена система уравнений, описывающая деформации тонкостенного стержня при изгибе с кручением.

Полученная система уравнений решена для частного случая (жесткие опоры) численно методом Эйлера в табличном процессоре MS Excel для представленной серии прокатных балок с вычислением критической силы в середине пролета – погрешность вычислений в Excel в сравнении с решениями в ЛИРА-СА-ПР находятся в пределах точности и инженерных расчетов.

Дальнейшие задачи исследования:

- решение полученной системы уравнений более точными методами;
- экспериментальная проверка адекватности полученной математической модели с разработкой и изготовлением испытательного стенда, образцов балок с подготовкой программы проведения работ.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Йордановска Д., Смирнов О.М. Расчет коэффициентов потери общей устойчивости стальных холодногнутых профилей методом конечных элементов // Инженерный вестник Дона. 2023. № 10 (106). С. 32.
2. Серпик И.Н., Школяренко Р.О. Расчет систем тонкостенных стержней корытообразного профиля с учетом стесненного кручения // Строительство и реконструкция. 2018. № 4. С. 31-41.
3. Лалин В.В., Кудинов В.В. Реализация метода конечных элементов в задачах устойчивости тонкостенных стержней для полусдвиговой теории ВИ Сливкера // Синергия Наук. 2017. № 1. С. 858-877.
4. Горынин А.Г., Горынин Г.Л., Голушко С.К. Исследование стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля методом асимптотического расщепления // Прикладная механика и техническая физика. 2024. № 65(3). С. 123-141.
5. Горынин Г. Л., Голушко С. К., Горынин А. Г. Метод асимптотического расщепления в задачах расчета тонкостенных стержней произвольной формы // Сборник тезисов XXVIII Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. 2023.
6. Присекин В. Л., Расторгуев Г.И. Изгиб и стесненное кручение тонкостенных стержней // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 45-58. DOI: 10.1134/S0572329919050155
7. Zhang W. et al. Experimental study of a composite beam externally bonded with a carbon fiber-reinforced plastic plate // Journal of Building Engineering. 2023. 71: 106522. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2023.106522>
8. Rees D.W.A., Alsheikh A.M.S. Theory of Flexural Shear, Bending and Torsion for a Thin-Walled Beam of Open Section // World Journal of Mechanics. 2024. № 14 (3). С. 23-53. DOI: 10.4236/wjm.2024.143003
9. Duan L., Zhao J., Zou J. Generalized beam theory-based advanced beam finite elements for linear buckling analyses of perforated thin-walled members // Computers & Structures. 2022. 259: 106683. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106683>
10. Zhang X., Fu X. New theoretical models for the bending moment of thin-walled beams under three-point bending // Applied Mathematical Modelling. 2023. 121: 21-42. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.04.015>
11. Vieira R.F., F.B.E. Virtuoso, E.B.R. Pereira. Buckling of thin-walled structures through a higher order beam model // Computers & Structures. 2017. 180: 104-116. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.01.005>
12. Galishnikova Vera, Tesfaldet Gebre. The behaviour of thin-walled beam with restrained torsion // Magazine of Civil Engineering. 2022. 110(2): 11009. DOI:10.34910/MCE.110.9
13. Yao Yu-hang, et al. Bending performance of cold-formed thin-wall steel-glulam composite beams using finite element analysis. 2022. 111-116. DOI: 10.13759/j.cnki.dlxb.2022.04.017
14. Ajdukiewicz Cezary, Marcin Gajewski. Verification of the thin-walled beam theory with application of FEM and shell modeling // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 661(1). DOI 10.1088/1757-899X/661/1/012005
15. Kibkalo Anton, Lebedeva Maria, Volkov Mikhail. Methods of parametric optimization of thin-walled structures and parameters which influence on it // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences. 2016. Vol. 53. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20165301051>
16. Pacheco-Chérrez Josué, Diego Cárdenas and Oliver Probst. Experimental detection and measurement of crack-type damage features in composite thin-wall beams using modal analysis // Sensors. 2021. 21.23: 8102. <https://doi.org/10.3390/s21238102>
17. Nguyen Tan-Tien, Pham Toan Thang and Jaehong Lee. Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams // Thin-Walled Structures. 2017.110: 88-96. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.09.021>

18. Rees David WA. A Stress Analysis of a Thin-Walled, Open-Section, Beam Structure: The Combined Flexural Shear, Bending and Torsion of a Cantilever Channel Beam // *Applied Sciences*. 2025.15.15: 8470. <https://doi.org/10.3390/app15158470>

19. Zeng Lingqi. Static finite element analysis of three-closed box thin-wall beam based on Pseudo-elastic SMA hybrid composite material ANSYS // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1802(2). DOI 10.1088/1742-6596/1802/2/022095

20. Wu Yan and Li Yang. Elastic and failure characteristics of additive manufactured thin wall lattice structures with defects // *Thin-Walled Structures*. 2021. 161: 107493. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107493>

REFERENCES

1. Yordanovska D., Smirnov O.M. Calculation of the coefficients of loss of general stability of cold-bent steel profiles by the finite element method. *Engineering Bulletin of the Don*. 2023;10 (106): 32.

2. Serpik I. N., Shkolyarenko R.O. Calculation of systems of thin-walled rods of a trough-shaped profile, taking into account constrained torsion. *Construction and Reconstruction*. 2018; (4): 31-41.

3. Lalin V.V., Kudinov V.V. Implementation of the finite element method in problems of stability of thin-walled rods for the semi-displacement theory of V. Slicker. *Synergy of Sciences*. 2017; (11): 858-877.

4. Gorynin A.G., Gorynin G.L., Golushko S.K. Study of Constrained Torsion of Thin-Walled Rods of Open Profile by the Asymptotic Splitting Method. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2024; 65(3): 123–141.

5. Gorynin G.L., Golushko S.K., Gorynin A.G. Asymptotic splitting method in problems of calculating thin-walled rods of arbitrary shape. *Collection of abstracts of the XXVIII All-Russian Conference on Numerical Methods for Solving Problems of Elasticity and Plasticity Theory*. 2023.

6. Prisekin V.L., Rastorguev G.I. Bending and constrained torsion of thin-walled rods. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*. 2019; (5): 45-58. DOI: 10.1134/S0572329919050155

7. Zhang W. et al. Experimental study of a composite beam externally bonded with a carbon fiber-reinforced plastic plate. *Journal of Building Engineering*. 2023; 71: 106522. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2023.106522>

8. Rees D.W. A., Alsheikh A.M.S. Theory of Flexural Shear, Bending and Torsion for a Thin-Walled Beam of Open Section. *World Journal of Mechanics*. 2024; 14(3): 23-53. DOI: 10.4236/wjm.2024.143003

9. Duan L., Zhao J., Zou J. Generalized beam theory-based advanced beam finite elements for linear buckling analyses of perforated thin-walled members. *Computers & Structures*. 2022; 259: 106683. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106683>

10. Zhang X., Fu X. New theoretical models for the bending moment of thin-walled beams under three-

point bending. *Applied Mathematical Modelling*. 2023; 121: 21-42. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.04.015>

11. Vieira R.F., Virtuoso F.B.E., Pereira E.B.R. Buckling of thin-walled structures through a higher order beam model. *Computers & Structures*. 2017; (180): 104-116. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.01.005>

12. Galishnikova Vera, Tesfaldet Gebre. The behaviour of thin-walled beam with restrained torsion. *Magazine of Civil Engineering*. 2022; 110 (2): 11009. DOI:10.34910/MCE.110.9

13. Yao Yu-hang, et al. Bending performance of cold-formed thin-wall steel-glulam composite beams using finite element analysis. 2022; 111-116. DOI: 10.13759/j.cnki.dlxb.2022.04.017

14. Ajdukiewicz Cezary, Gajewski Marcin. Verification of the thin-walled beam theory with application of FEM and shell modelling. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019; 661(1). IOP Publishing. DOI 10.1088/1757-899X/661/1/012005

15. Kibkalo Anton, Lebedeva Maria, Volkov Mikhail. Methods of parametric optimization of thin-walled structures and parameters which influence on it. *MATEC Web of Conferences*. EDP Sciences, 2016; 53. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20165301051>

16. Pacheco-Chérrez Josué, Diego Cárdenas, Oliver Probst. Experimental detection and measurement of crack-type damage features in composite thin-wall beams using modal analysis. *Sensors*. 2021; 21 (23): 8102. <https://doi.org/10.3390/s21238102>

17. Nguyen Tan-Tien, Pham Toan Thang, Jae-hong Lee. Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams. *Thin-Walled Structures*. 2017; (110): 88-96. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.09.021>

18. Rees David WA. A Stress Analysis of a Thin-Walled, Open-Section, Beam Structure: The Combined Flexural Shear, Bending and Torsion of a Cantilever Channel Beam. *Applied Sciences*. 2025; 15 (15): 8470. <https://doi.org/10.3390/app15158470>

19. Zeng Lingqi. Static finite element analysis of three-closed box thin-wall beam based on Pseudo-elastic SMA hybrid composite material ANSYS. *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2021; 1802 (2). DOI 10.1088/1742-6596/1802/2/022095

20. Wu Yan, Li Yang. Elastic and failure characteristics of additive manufactured thin wall lattice structures with defects. *Thin-Walled Structures*. 2021; (161): 107493. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107493>

ЗАЯВЛЕННЫЙ ВКЛАД АВТОРОВ

Ступин М.А. Описание материалов и методов для расчета исследуемых конструкций, проведение расчётов, анализ результатов.

Макеев С.А. Формирование направления исследования, формулировка цели и задач, обозначение алгоритма исследований, обоснование и структурирование методики расчета.

Комлев А.А. Проведение расчётов, анализ результатов, оформление материалов.

COAUTHORS' CONTRIBUTION

Stupin Mikhail A. Description of materials and methods for designing structures under the study, providing calculations, data analysis.

Makeev Sergey A. Research concept design, determining the research goals and objectives, selecting and structuring the research methods.

Komlev Andrey A. Providing calculations, data analysis, writing the manuscript.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Ступин Михаил Александрович – ведущий инженер АО «Судостроительный завод им. Б. Е. Бутомы» (298313, г. Керчь, ул. Танкистов, 4).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9892-150X>,

e-mail: 79620503150@yandex.ru

Макеев Сергей Александрович – д-р техн. наук, доц. Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета (СибАДИ) (644050, г. Омск, просп. Мира, 5).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2915-982X>,

SPIN-код: 6262-3790,

Author ID: 374540,

e-mail: makeev608079@mail.ru

Комлев Андрей Александрович – канд. техн. наук, доц. Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета (СибАДИ) (644050, г. Омск, просп. Мира, 5)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6919-3686>,

e-mail: komlev-12@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Stupin Mikhail A. – Leading Engineer, B. E. Butoma Shipbuilding Plant JSC (4, Tankistov Str., Kerch, 298313).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9892-150X>,

e-mail: 79620503150@yandex.ru

Makeev Sergey A. - Doctor of Technical Science, Associate Professor, the Siberian State Automobile and Highway University (SibADI) (5, Ave. Mira, Omsk, 644050).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2915-982X>,

e-mail: makeev608079@mail.ru

Komlev Andrey A. – PhD in Engineering, Associate Professor, the Siberian State Automobile and Highway University (SibADI) (5, Ave. Mira, Omsk, 644050).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6919-3686>,

e-mail: komlev-12@yandex.ru