

УДК 629.3.027.5

<https://doi.org/10.26518/2071-7296-2022-19-2-258-277><https://elibrary.ru/UKCWYQ>

Научная статья



АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ АМОРТИЗАТОРА НА СОХРАННОСТЬ ГРУЗА, БЕЗОТРЫВНОЕ КАЧЕНИЕ КОЛЕСА И ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В ПОДВЕСКЕ АВТОМОБИЛЯ

К. В. Чернышов*, В. В. Новиков, Р. Р. Санжапов, В. В. Котов
Волгоградский государственный технический университет,
г. Волгоград, Россия

chernykv@rambler.ru, <http://orcid.org/0000-0002-2816-1768>

nvv_60@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0002-0917-781X>

rs@vstu.ru, <http://orcid.org/0000-0003-4107-7429>

vladkotov007@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0003-3753-0526>

*ответственный автор

АННОТАЦИЯ

Введение. Целью статьи является рассмотрение влияния демпфирования в амортизаторе на сохранность груза, безотрывное качение колеса и потери энергии в подвеске автомобиля.

Материалы и методы. Рассмотрение основано на анализе амплитудно-частотных характеристик двухмассовой модели автомобиля и зависимости работы амортизатора за цикл колебаний от частоты кинематического воздействия.

Результаты. В статье приведена расчетная схема и уравнения динамики двухмассовой колебательной системы, эквивалентной автомобильной подвеске. Рассчитаны частоты, при которых пересекаются амплитудно-частотные характеристики для различных уровней демпфирования (инвариантные точки) в двухмассовой колебательной системе. Предложено понятие «относительная работа амортизатора за цикл колебаний» и приведена формула для расчета относительной работы амортизатора в двухмассовой колебательной системе. Проведён сравнительный анализ графиков, характеризующих плавность хода, безотрывное качение колеса и потери энергии в подвеске.

Обсуждение и заключение. Выявлено, что существенные противоречия между этими требованиями возникают только вблизи второго резонанса подрессоренной массы, при увеличении частоты колебаний в зарезонансной зоне эти противоречия сглаживаются.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: автомобиль, двухмассовая колебательная система, амортизаторы, сохранность груза, безотрывное качение колеса, потери энергии в подвеске, амплитудно-частотные характеристики, относительная работа амортизатора, инвариантные точки.

БЛАГОДАРНОСТИ. Авторы выражают благодарность руководству СибАДИ за предоставленную возможность публикации материала, а также рецензентам за уделенное внимание нашим исследованиям.

Статья поступила в редакцию 20.02.2022; одобрена после рецензирования 09.03.2022; принята к публикации 12.04.2022.

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Для цитирования: Чернышов К. В. Анализ влияния сопротивления амортизатора на сохранность груза, безотрывное качение колеса и потери энергии в подвеске автомобиля / К. В. Чернышов, В. В. Новиков, Р. Р. Санжапов, В. В. Котов // Вестник СибАДИ. 2022. Т.19, № 2(84). С. 258-277. <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2022-19-2-258-277>

© Чернышов К. В., Новиков В. В., Санжапов Р. Р., Котов В. В., 2022



Контент доступен под лицензией
Creative Commons Attribution 4.0 License.

<https://doi.org/10.26518/2071-7296-2022-19-2-258-277>
<https://elibrary.ru/UKCWYQ>
Original article

ANALYSIS OF SHOCK ABSORBER RESISTANCE IMPACT ON LOAD SAFETY, CONTINUOUS WHEEL ROLLING AND ENERGY LOSS IN VEHICLE SUSPENSION

Konstantin V. Chernyshov*, Viacheslav V. Novikov, Rustam R. Sanzhapov, Vladislav V. Kotov
Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia
chernykv@rambler.ru, <http://orcid.org/0000-0002-2816-1768>
nvv_60@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0002-0917-781X>
rs@vstu.ru, <http://orcid.org/0000-0003-4107-7429>
vladkotov007@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0003-3753-0526>
*corresponding author

ABSTRACT

Introduction. The purpose of the article is to consider the effect of damping in the shock absorber on smooth running, continuous rolling of the wheel and energy loss in the suspension of the car.

Materials and methods. The review is based on the analysis of the amplitude-frequency characteristics of a two-mass car model and the dependence of the shock absorber operation during the oscillation cycle on the frequency of kinematic action.

Results. The article presents a calculation scheme and equations of dynamics of a two-mass oscillatory system equivalent to an automobile suspension. The frequencies at which the amplitude-frequency characteristics intersect for different levels of damping (invariant points) in a two-mass oscillatory system are calculated. The relative operation of the shock absorber for the oscillation cycle concept is proposed and a formula for calculating the relative operation of the shock absorber in a two-mass oscillatory system is given. A comparative analysis of graphs characterizing smooth running, continuous rolling of the wheel and energy losses in the suspension is carried out.

Discussion and conclusions. It is revealed that significant contradictions between these requirements arise only near the second resonance of the sprung mass, with an increase in the frequency of vibrations in the resonant zone, these contradictions are decrease.

KEYWORDS: car, two-mass oscillatory system, shock absorbers, cargo safety, continuous rolling of the wheel, energy loss in the suspension, amplitude-frequency characteristics, relative operation of the shock absorber, invariant points.

ACKNOWLEDGMENTS. The authors expressed gratitude to SibADI management for the opportunity to publish the material, as well as to reviewers for the attention paid to our research.

The article was submitted 20.02.2022; approved after reviewing 09.03.2022; accepted for publication 12.04.2022.

The authors have read and approved the final manuscript.

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

For citation: Konstantin V. Chernyshov, Viacheslav V. Novikov, Rustam R. Sanzhapov, Vladislav V. Kotov Analysis of shock absorber resistance impact on load safety, continuous wheel rolling and energy loss in vehicle suspension. *The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. 2022; 19 (2): 258-277. <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2022-19-2-258-277>

© Chernyshov K. V., Novikov V. V., Sanzhapov R. R., Kotov V. V., 2022



Content is available under the license
Creative Commons Attribution 4.0 License.

Основные положения. В статье приведена расчетная схема и уравнения динамики двухмассовой колебательной системы, эквивалентной автомобильной подвеске. Рассчитаны частоты, при которых пересекаются амплитудно-частотные характеристики для различных уровней демпфирования (инвариантные точки) в двухмассовой колебательной системе. Предложено понятие «относительная работа амортизатора за цикл колебаний» и приведена формула для расчета относительной работы амортизатора в двухмассовой колебательной системе. Проведён сравнительный анализ графиков, характеризующих сохранность груза, безотрывное качение колеса и потери энергии в подвеске. Выявлено, что существенные противоречия между этими требованиями возникают только вблизи второго резонанса подрессоренной массы, при увеличении частоты колебаний в зарезонансной зоне эти противоречия сглаживаются.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что характеристики нерегулируемой автомобильной подвески при ее проектировании выбираются в результате поиска компромисса между противоречивыми требованиями плавности хода и комфорта с одной стороны, а также устойчивости и управляемости с другой стороны. Так, принято считать, что пониженное демпфирование способствует повышению плавности хода, а увеличение демпфирования в рациональных пределах содействует безотрывному качению колеса и вследствие этого приводит к повышению устойчивости движения автомобиля. Кроме того, всё больше внимания обращают на энергоэффективность подвески, которая тоже часто вступает в противоречие со всеми указанными требованиями.

Исследованию влияния демпфирования в линейной подвеске на вертикальные ускорения подрессоренных масс, деформацию шин и пробой подвески, вычислению оптимальных для плавности хода и безопасности движения коэффициентов сопротивления амортизаторов для различных спектров возмущений посвящён объемный параграф в фундаментальной работе [1]. В работе [2] рассмотрено влияние демпфирования в линейной подвеске на вертикальные перемещения и ускорения подрессоренных и перемещения неподрессоренных масс на основе анализа амплитудно-частотных характеристик двухмассовой колебательной системы, однако в этой работе не рассмотрены деформации шин, влияющие на устойчивость, не вычислены узловые (инвариантные) точки и не проведен сравнительный анализ влияния демпфирования на плавность хода и устойчивость движения. Результаты исследования линейных подвесок приведены в работах [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Исследованию выделения энергии в амортизаторе одномассовой колебательной системы посвящены работы [18].

Наиболее простой моделью автомобиля, учитывающей наличие в автомобиле подрессоренной и неподрессоренной масс, упругих

и демпфирующих свойств подвески и шины, является двухмассовая колебательная система с внешним кинематическим воздействием (рисунок 1). Здесь, соответственно, m_1 и m_2 – подрессоренная и неподрессоренная массы, c_1 и c_2 – жёсткость рессоры и шины, k_1 и k_2 – коэффициенты демпфирования амортизатора подвески и шины, z_1 и z_2 – перемещения подрессоренной и неподрессоренной масс, q – кинематическое воздействие.

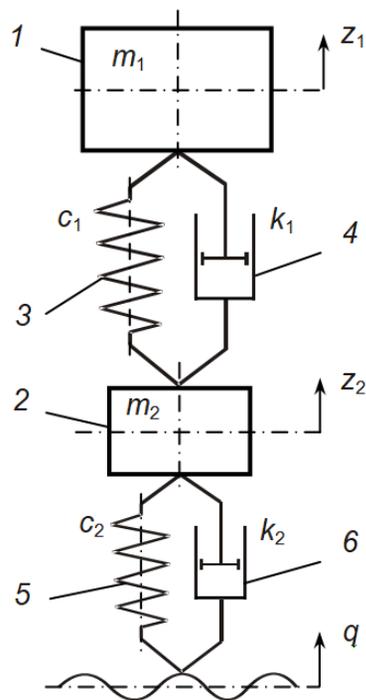


Рисунок 1 – Схема двухмассовой одноопорной виброзащитной системы на основе [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12]: 1 – подрессоренная масса; 2 – неподрессоренная масса; 3 – упругий элемент (рессора); 4 – демпфер (амортизатор); 5 и 6 – шина с упругими и демпфирующими свойствами

Figure 1 – Diagram of a two-mass single-support vibration protection system based on [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12]: 1 – sprung mass; 2 – unsprung mass; 3 – elastic element (spring); 4 – damper (shock absorber); 5 and 6 – tire with elastic and damping properties

Двухмассовая колебательная система позволяет изучить влияние подвески не только на колебания подрессоренной массы, но и на колебания неподрессоренной массы, а также на деформации шин. Математической моделью динамики такой системы является система из двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + k_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c_1 (z_1 - z_2) &= 0; \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2 (\dot{z}_2 - \dot{q}) + c_2 (z_2 - q) - k_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - c_1 (z_1 - z_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Разделим первое и второе уравнения на m_1 и m_2 соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 + \frac{k_1}{m_1} (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \frac{c_1}{m_1} (z_1 - z_2) &= 0; \\ \ddot{z}_2 + \frac{k_2}{m_2} (\dot{z}_2 - \dot{q}) + \frac{c_2}{m_2} (z_2 - q) - \frac{k_1}{m_2} (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - \frac{c_1}{m_2} (z_1 - z_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Введем обозначения:

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}, \quad \frac{k_1}{m_1} = 2h_1, \quad \frac{k_2}{m_2} = 2h_2, \quad \frac{c_1}{m_1} = \omega_{01}^2, \quad \frac{c_2}{m_2} = \omega_{02}^2. \quad (3)$$

Здесь h_1 и h_2 – парциальные (относящиеся к разделенным колебательным системам) относительные коэффициенты демпфирования, ω_{01} и ω_{02} – парциальные собственные частоты подрессоренной и неподрессоренной масс. С учетом этих обозначений получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 + 2h_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \omega_{01}^2 (z_1 - z_2) &= 0; \\ \ddot{z}_2 + 2h_2 (\dot{z}_2 - \dot{q}) + \omega_{02}^2 (z_2 - q) - 2h_1 \mu (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - \omega_{01}^2 \mu (z_1 - z_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений (4) приводится к двум дифференциальным уравнениям четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{z}}_1 + (2h_1 + 2h_1 \mu + 2h_2) \ddot{\ddot{z}}_1 + (2h_1 \cdot 2h_2 + \omega_{02}^2 + \omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu) \ddot{\ddot{z}}_1 + (2h_1 \omega_{02}^2 + 2h_2 \omega_{01}^2) \dot{\ddot{z}}_1 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 z_1 = \\ = 2h_1 \cdot 2h_2 \ddot{q} + (2h_1 \omega_{02}^2 + 2h_2 \omega_{01}^2) \dot{q} + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 q \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{z}}_2 + (2h_1 + 2h_1 \mu + 2h_2) \ddot{\ddot{z}}_2 + (2h_1 \cdot 2h_2 + \omega_{02}^2 + \omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu) \ddot{\ddot{z}}_2 + (2h_1 \omega_{02}^2 + 2h_2 \omega_{01}^2) \dot{\ddot{z}}_2 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 z_2 = \\ = 2h_2 \ddot{q} + (2h_1 \cdot 2h_2 + \omega_{02}^2) \dot{q} + (2h_1 \omega_{02}^2 + 2h_2 \omega_{01}^2) q + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 q. \end{aligned} \quad (6)$$

Решения однородных уравнений, соответствующих уравнениям (5) и (6), характеризуют переходные процессы в системе, а частные решения этих уравнений – ее установившееся движение.

Поскольку при исследовании работы автомобильных подвесок обычно важно знать закономерности установившихся колебательных процессов, рассмотрим динамику двухмассовой колебательной системы и частное решение неоднородных уравнений при синусоидальном кинематическом возмущении.

Частные решения неоднородных дифференциальных уравнений (5) и (6) для синусоидального возмущения $q = q_0 \sin \omega t$ имеют вид:

$$z_1 = z_{10} \sin(\omega t + \beta_{z_1/q}), \quad z_2 = z_{20} \sin(\omega t + \beta_{z_2/q}), \quad (7)$$

где z_{01} и z_{02} – амплитуды колебаний, соответственно, подрессоренной и неподрессоренной масс; $\beta_{z_1/q}$ и $\beta_{z_2/q}$ – фазовые сдвиги колебаний этих масс относительно кинематического воздействия. Амплитуды колебаний

$$z_{10} = q_0 \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{C^2 + D^2}}, \quad z_{20} = q_0 \sqrt{\frac{A_2^2 + B_2^2}{C^2 + D^2}}, \quad (8)$$

фазовые сдвиги колебаний

$$\beta_{z_1/q} = -\arctg \frac{A_1 D - B_1 C}{A_1 C + B_1 D}, \quad \beta_{z_2/q} = -\arctg \frac{A_2 D - B_2 C}{A_2 C + B_2 D}. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C &= \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (2h_1 \omega \cdot 2h_2 \omega + \omega_{01}^2 \omega^2 + \omega_{01}^2 \omega^2 \mu + \omega_{02}^2 \omega^2) + \omega^4; \\ D &= 2h_1 \omega \omega_{02}^2 + 2h_2 \omega \omega_{01}^2 - (2h_1 \omega + 2h_1 \omega \mu + 2h_2 \omega) \cdot \omega^2; \\ A_1 &= \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - 2h_1 \omega \cdot 2h_2 \omega; \\ B_1 &= 2h_1 \omega \omega_{02}^2 + 2h_2 \omega \omega_{01}^2; \\ A_2 &= \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - 2h_1 \omega \cdot 2h_2 \omega - \omega_{02}^2 \omega^2; \\ B_2 &= 2h_1 \omega \omega_{02}^2 + 2h_2 \omega \omega_{01}^2 - 2h_2 \omega \omega^2. \end{aligned}$$

Значения амплитуд и фазовых сдвигов вынужденных колебаний в безразмерных величинах:

$$K_{z_1/q} = \frac{z_{10}}{q_0} = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{c^2 + d^2}}, \quad K_{z_2/q} = \frac{z_{20}}{q_0} = \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{c^2 + d^2}}, \quad (10)$$

$$\beta_{z_1/q} = -\arctg \frac{a_1 d - b_1 c}{a_1 c + b_1 d}, \quad \beta_{z_2/q} = -\arctg \frac{a_2 d - b_2 c}{a_2 c + b_2 d}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} c &= 1 - 2\psi_1 \iota_1 \cdot 2\psi_2 \iota_2 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2; \\ d &= 2\psi_1 \iota_1 + 2\psi_2 \iota_2 - 2\psi_1 \iota_1 \iota_2^2 - 2\psi_1 \iota_1 \iota_2^2 \mu - 2\psi_2 \iota_2 \iota_1^2; \\ a_1 &= 1 - 2\psi_1 \iota_1 \cdot 2\psi_2 \iota_2; \\ b_1 &= 2\psi_1 \iota_1 + 2\psi_2 \iota_2; \\ a_2 &= 1 - 2\psi_1 \iota_1 \cdot 2\psi_2 \iota_2 - \iota_1^2; \\ b_2 &= 2\psi_1 \iota_1 + 2\psi_2 \iota_2 - 2\psi_2 \iota_2 \iota_1^2. \end{aligned}$$

Амплитуды ускорений определяются из выражений:

$$\begin{aligned} a_{10} &= \omega^2 z_{10} = \omega_{01}^2 \iota_1^2 z_{10} = \omega_{02}^2 \iota_2^2 z_{10}, \\ a_{20} &= \omega^2 z_{20} = \omega_{01}^2 \iota_1^2 z_{20} = \omega_{02}^2 \iota_2^2 z_{20}. \end{aligned} \quad (12)$$

Амплитуды ускорений в безразмерных величинах:

$$K_{\ddot{z}_1/q} = \frac{a_{10}}{q_0 \omega_{01}^2} = \iota_1^2 \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{c^2 + d^2}}, \quad K_{\ddot{z}_2/q} = \frac{a_{20}}{q_0 \omega_{01}^2} = \iota_1^2 \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{c^2 + d^2}}. \quad (13)$$

Большой интерес при исследовании подвесок представляют амплитудно-частотные характеристики деформаций подвески и шин. Деформации подвески характеризуют ее энергопотери, пробой и отрывы, а деформации шин определяют сцепление колеса с дорогой.

Введем обозначения: $x = z_1 - z_2$ – деформация подвески, $y = z_2 - q$ – деформация шины. Произведем изменения в системе уравнений (4):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 + 2h_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \omega_{01}^2(z_1 - z_2) &= -(\ddot{z}_2 - \ddot{q}) - \ddot{q}; \\ \ddot{z}_2 - \ddot{q} + 2h_2(\dot{z}_2 - \dot{q}) + \omega_{02}^2(z_2 - q) - 2h_1\mu(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - \omega_{01}^2\mu(z_1 - z_2) &= -\ddot{q}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Тогда, с учетом принятых обозначений,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + \omega_{01}^2x + \dot{y} &= -\dot{q}; \\ \ddot{y} + 2h_2\dot{y} + \omega_{02}^2y - 2h_1\dot{x} - \omega_{01}^2\mu x &= -\dot{q}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Система дифференциальных уравнений (15) приводится к двум дифференциальным уравнениям четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{x}} + (2h_1 + 2h_1\mu + 2h_2)\ddot{\ddot{x}} + (2h_1 \cdot 2h_2 + \omega_{02}^2 + \omega_{01}^2 + \omega_{01}^2\mu)\ddot{\ddot{x}} + (2h_1\omega_{02}^2 + 2h_2\omega_{01}^2)\dot{\ddot{x}} + \omega_{01}^2\omega_{02}^2x &= \\ = -2h_2\ddot{\ddot{q}} - \omega_{02}^2\ddot{\ddot{q}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{y}} + (2h_1 + 2h_1\mu + 2h_2)\ddot{\ddot{y}} + (2h_1 \cdot 2h_2 + \omega_{02}^2 + \omega_{01}^2 + \omega_{01}^2\mu)\ddot{\ddot{y}} + (2h_1\omega_{02}^2 + 2h_2\omega_{01}^2)\dot{\ddot{y}} + \omega_{01}^2\omega_{02}^2y &= \\ = -\ddot{\ddot{q}} - (2h_1 + 2h_1\mu)\ddot{\ddot{q}} - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2\mu)\ddot{\ddot{q}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Так же как и в случае уравнений (5) и (6), нас интересуют частные решения неоднородных дифференциальных уравнений (16) и (17), которые для синусоидального возмущения $q = q_0 \sin \omega t$ имеют вид:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \beta_{x/q}), \quad (18)$$

$$y = y_0 \sin(\omega t + \beta_{y/q}), \quad (19)$$

где x_0 и y_0 – амплитуды деформаций, соответственно, подвески и шины; $\beta_{x/q}$ и $\beta_{y/q}$ – их фазовые сдвиги относительно кинематического воздействия. Здесь амплитуды колебаний

$$x_0 = q_0 \sqrt{\frac{A_x^2 + B_x^2}{C^2 + D^2}}, \quad y_0 = q_0 \sqrt{\frac{A_y^2 + B_y^2}{C^2 + D^2}}, \quad (20)$$

фазовые сдвиги колебаний

$$\beta_{x/q} = -\arctg \frac{A_x D - B_x C}{A_x C + B_x D}, \quad \beta_{y/q} = -\arctg \frac{A_y D - B_y C}{A_y C + B_y D}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (2h_1 \omega \cdot 2h_2 \omega + \omega_{01}^2 \omega^2 + \omega_{01}^2 \omega^2 \mu + \omega_{02}^2 \omega^2) + \omega^4; \\ D &= 2h_1 \omega \omega_{02}^2 + 2h_2 \omega \omega_{01}^2 - (2h_1 \omega + 2h_1 \omega \mu + 2h_2 \omega) \cdot \omega^2; \\ A_x &= \omega_{02}^2 \omega^2; \\ B_x &= 2h_2 \omega^3; \\ A_y &= (\omega_{01}^2 (1 + \mu) - \omega^2) \omega^2; \\ B_y &= 2h_1 \omega^3 (1 + \mu). \end{aligned}$$

Амплитуды колебаний в безразмерных величинах:

$$K_x = \frac{x_0}{q_0} = \sqrt{\frac{a_x^2 + b_x^2}{c^2 + d^2}}, \quad K_y = \frac{y_0}{q_0} = \sqrt{\frac{a_y^2 + b_y^2}{c^2 + d^2}}, \quad (22)$$

фазовые сдвиги колебаний в безразмерных величинах:

$$\beta_{x/q} = -\arctg \frac{a_x d - b_x c}{a_x c + b_x d}, \quad \beta_{y/q} = -\arctg \frac{a_y d - b_y c}{a_y c + b_y d}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} c &= 1 - 2\psi_1 \iota_1 \cdot 2\psi_2 \iota_2 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2; \\ d &= 2\psi_1 \iota_1 + 2\psi_2 \iota_2 - 2\psi_1 \iota_1 \iota_2^2 - 2\psi_1 \iota_1 \iota_2^2 \mu - 2\psi_2 \iota_2 \iota_1^2; \\ a_x &= \iota_1^2; \\ b_x &= 2\psi_2 \iota_2 \iota_1^2; \\ a_y &= (1 + \mu - \iota_1^2) \iota_2^2; \\ b_y &= 2\psi_1 \iota_1 (1 + \mu) \iota_2^2. \end{aligned}$$

Демпфирование в автомобильной шине очень мало, поэтому при проведении расчетов им обычно пренебрегают, что существенно упрощает приведенные выше формулы. Так дифференциальные уравнения (5) и (6) при $h_2 = 0$ ($\psi_2 = 0$), соответственно, принимают вид:

$$\ddot{z}_1 + 2h_1(1 + \mu)\dot{z}_1 + (\omega_{01}^2(1 + \mu) + \omega_{02}^2)z_1 + 2h_1\omega_{02}^2\dot{z}_1 + \omega_{01}^2\omega_{02}^2z_1 = (2h_1\dot{q} + \omega_{01}^2q)\omega_{02}^2; \quad (24)$$

$$\ddot{z}_2 + 2h_1(1 + \mu)\dot{z}_2 + (\omega_{01}^2(1 + \mu) + \omega_{02}^2)z_2 + 2h_1\omega_{02}^2\dot{z}_2 + \omega_{01}^2\omega_{02}^2z_2 = (\ddot{q} + 2h_1\dot{q} + \omega_{01}^2q)\omega_{02}^2. \quad (25)$$

Тогда выражения для расчета значений амплитуд колебаний подрессоренной и непрорессоренной масс, соответственно:

$$\begin{aligned} z_{01} &= q_0 \omega_{02}^2 \sqrt{\frac{\omega_{01}^4 + 4h_1^2 \omega^2}{[\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4]^2 + 4h_1^2 \omega^2 [\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2]^2}}; \\ z_{02} &= q_0 \omega_{02}^2 \sqrt{\frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2 \omega^2}{[\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4]^2 + 4h_1^2 \omega^2 [\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2]^2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

В безразмерных величинах амплитуды:

$$\begin{aligned} K_{z_{1/q}} &= \frac{z_{01}}{q_0} = \sqrt{\frac{1 + 4\psi_1^2 \iota_1^2}{[1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2]^2 + 4\psi_1^2 \iota_1^2 [1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu]^2}}; \\ K_{z_{2/q}} &= \frac{z_{02}}{q_0} = \sqrt{\frac{(1 - \iota_1^2)^2 + 4\psi_1^2 \iota_1^2}{[1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2]^2 + 4\psi_1^2 \iota_1^2 [1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu]^2}}, \end{aligned} \quad (27)$$

сдвиги фаз колебаний подрессоренной и непрорессоренной масс, соответственно:

$$\begin{aligned} \beta_{z_{1/q}} &= -\arctg \frac{2\psi_1 \iota_1 (\iota_1^2 - \iota_1^2 \iota_2^2)}{1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2 + 4\psi_1^2 \iota_1^2 (1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu)}; \\ \beta_{z_{2/q}} &= -\arctg \frac{2\psi_1 \iota_1 \iota_1^2 \iota_2^2 \mu}{1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - 2\iota_1^2 + 2\iota_1^2 \iota_2^2 + \iota_1^2 \iota_2^2 \mu + \iota_1^4 - \iota_1^4 \iota_2^2 + 4\psi_1^2 \iota_1^2 (1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Дифференциальные уравнения (16) и (17) при $h_2 = 0$ ($\psi_2 = 0$), соответственно:

$$\ddot{x} + 2h_1(1 + \mu)\dot{x} + (\omega_{01}^2(1 + \mu) + \omega_{02}^2)x + 2h_1\omega_{02}^2\dot{x} + \omega_{01}^2\omega_{02}^2x = -\omega_{02}^2\ddot{q}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2h_1(1 + \mu)\dot{y} + (\omega_{01}^2(1 + \mu) + \omega_{02}^2)y + 2h_1\omega_{02}^2\dot{y} + \\ + 2h_1\omega_{02}^2\dot{y} + \omega_{01}^2\omega_{02}^2y = -\ddot{q} - 2h_1(1 + \mu)\dot{q} - \omega_{01}^2(1 + \mu)q. \end{aligned} \quad (30)$$

В этом случае амплитуды деформаций подвесок и шин, соответственно,

$$\begin{aligned} x_0 &= q_0 \sqrt{\frac{\omega^4 \omega_{02}^4}{\left[\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4 \right]^2 + 4h_1^2 \omega^2 \left[\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2 \right]^2}}; \\ y_0 &= q_0 \sqrt{\frac{(\omega_{01}^2 (1 + \mu) - \omega^2)^2 \omega^4 + 4h_1^2 \omega^6 (1 + \mu)^2}{\left[\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4 \right]^2 + 4h_1^2 \omega^2 \left[\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2 \right]^2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Эти же амплитуды в относительных координатах, соответственно,

$$\begin{aligned} K_x &= \sqrt{\frac{\iota_1^4}{(1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2)^2 + 4\psi_1^2 \iota_1^2 (1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu)^2}}; \\ K_y &= \iota_2^2 \sqrt{\frac{(1 + \mu - \iota_1^2)^2 + 4\psi_1^2 \iota_1^2 (1 + \mu)^2}{(1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2)^2 + 4\psi_1^2 \iota_1^2 (1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu)^2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Фазовые сдвиги колебаний

$$\begin{aligned} \beta_{x/q} &= -\arctg \frac{2h_1 \omega (\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2)}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - \omega_{01}^2 \omega^2 (1 + \mu) - \omega_{02}^2 \omega^2 + \omega^4}; \\ \beta_{y/q} &= -\arctg \frac{2h_1 \omega \cdot \omega_{02}^2 \mu \omega^2}{(\omega_{01}^2 (1 + \mu) - \omega^2) \cdot [\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - \omega_{01}^2 \omega^2 (1 + \mu) - \omega_{02}^2 \omega^2 + \omega^4] + 4h_1^2 \omega^2 (1 + \mu) \cdot [\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2]} \end{aligned} \quad (33)$$

Фазовые сдвиги колебаний в относительных координатах

$$\begin{aligned} \beta_{x/q} &= -\arctg \frac{2\psi_1 \iota_1 (1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu)}{1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2}; \\ \beta_{y/q} &= -\arctg \frac{2\psi_1 \iota_1 \mu \iota_1^2}{(1 + \mu - \iota_1^2)(1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu - \iota_1^2 + \iota_1^2 \iota_2^2) + 4\psi_1^2 \iota_1^2 (1 + \mu)(1 - \iota_2^2 - \iota_2^2 \mu)}. \end{aligned} \quad (34)$$

МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ

Для построения и анализа графиков амплитудно-частотных характеристик целесообразно ввести понятие относительной жесткости колебательной системы. Для этого рассмотрим отношение квадратов парциальных собственных частот:

$$\frac{\omega_{02}^2}{\omega_{01}^2} = \frac{c_2}{m_2} \cdot \frac{m_1}{c_1} = c_{\text{отн}} \mu. \quad (35)$$

Здесь $c_{\text{отн}} = \frac{c_2}{c_1}$ – относительная жесткость – отношение жесткости шины к жесткости упругого элемента подвески.

На рисунке 2 представлены амплитудно-частотные характеристики перемещений и ускорений двухмассовой колебательной системы с кинематическим возмущением с различными значениями относительного коэффициента демпфирования амортизатора и без демпфирования в шине при относительной жесткости колебательной системы $c_{\text{отн}} = 10/1,5$.

На рисунке 3 изображены амплитудно-частотные характеристики деформаций шин (а) и деформаций подвески (б) при отсутствии демпфирования в шинах и при различных величинах демпфирования в подвеске при той же относительной жесткости.

Увеличение демпфирования в подвеске двухмассовой колебательной системы при-

водит к снижению амплитуд колебаний поддрессоренной и неподдрессоренной масс и деформаций шин не во всем диапазоне частот, а на отдельных участках этого диапазона. При отсутствии демпфирования в шине амплитудно-частотные характеристики двухмассовой колебательной системы имеют инвариантные точки, разделяющие диапазоны влияния демпфирования в подвеске на амплитуды колебаний масс и деформаций шин.

Амплитудно-частотные характеристики деформаций подвески при слабом демпфировании в подвеске имеют два ярко выраженных резонансных пика, которые сглаживаются с увеличением демпфирования. Точек пересечения эти характеристики при различном демпфировании не имеют, но имеют точку касания. Увеличение демпфирования в подвеске всегда приводит к уменьшению амплитуд деформаций подвески.

На рисунке 2, а, в обозначены инвариантные точки, в которых пересекаются амплитудно-частотные характеристики перемещений поддрессоренной (точки А, Б, В) и неподдрессоренной (точки Г, Д) масс. На рисунке 3, а обозначены инвариантные точки амплитудно-частотных характеристик деформаций шин (точки Е, Ж). Точка касания графиков на рисунке 3, б (составлено авторами) обозначена буквой З.

Предлагается следующая методика расчета инвариантных точек.

Выражения (26) для расчета значений амплитуд колебаний поддрессоренной и неподдрессоренной масс и выражение (31) для расчета амплитуды деформаций шин имеют общий вид:

$$K(\omega, h^2) = \sqrt{\frac{a^2(\omega) + h^2 b^2(\omega)}{c^2(\omega) + h^2 d^2(\omega)}}. \quad (36)$$

Значения функции (36) не зависят от h^2 (и, следовательно, от h) при

$$\frac{\partial K}{\partial h^2} = 0. \quad (37)$$

Это и есть условие существования инвариантных точек. Найдем производную (37):

$$\frac{\partial K}{\partial h^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2(\omega) + h^2 d^2(\omega)}{a^2(\omega) + h^2 b^2(\omega)}}. \quad (38)$$

$$\frac{b^2(\omega)c^2(\omega) - d^2(\omega)a^2(\omega)}{(c^2(\omega) + h^2 d^2(\omega))^2} = 0.$$

Эквивалентное условие

$$b^2(\omega)c^2(\omega) - d^2(\omega)a^2(\omega) = 0 \quad (39)$$

или

$$b(\omega)c(\omega) = \pm d(\omega)a(\omega). \quad (40)$$

Инвариантными точками ω_{inv} будут решения уравнения (40) относительно ω .

Таким образом, методика расчета инвариантных точек сводится к выделению из выражений вида (36) зависимостей $a(\omega)$, $b(\omega)$, $c(\omega)$, $d(\omega)$ и решению уравнения (40) относительно ω .

Если слева и справа от инвариантной точки

ω_{inv} производная $\frac{\partial K}{\partial h^2}$ имеет разные знаки, то точка ω_{inv} является точкой пересечения. Если слева и справа от инвариантной точки

ω_{inv} производная $\frac{\partial K}{\partial h^2}$ имеет одинаковые знаки, то точка ω_{inv} является точкой касания.

Как видно из (38), знак производной $\frac{\partial K}{\partial h^2}$ зависит исключительно от знака выражения

$$b^2(\omega)c^2(\omega) - d^2(\omega)a^2(\omega). \quad (41)$$

Рассмотрим выражение для расчета значений амплитуд колебаний поддрессоренной массы

$$z_{01} = q_0 \omega_{02}^2 \sqrt{\frac{\omega_{01}^4 + 4h_1^2 \omega^2}{[\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4]^2 + 4h_1^2 \omega^2 [\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2]^2}}.$$

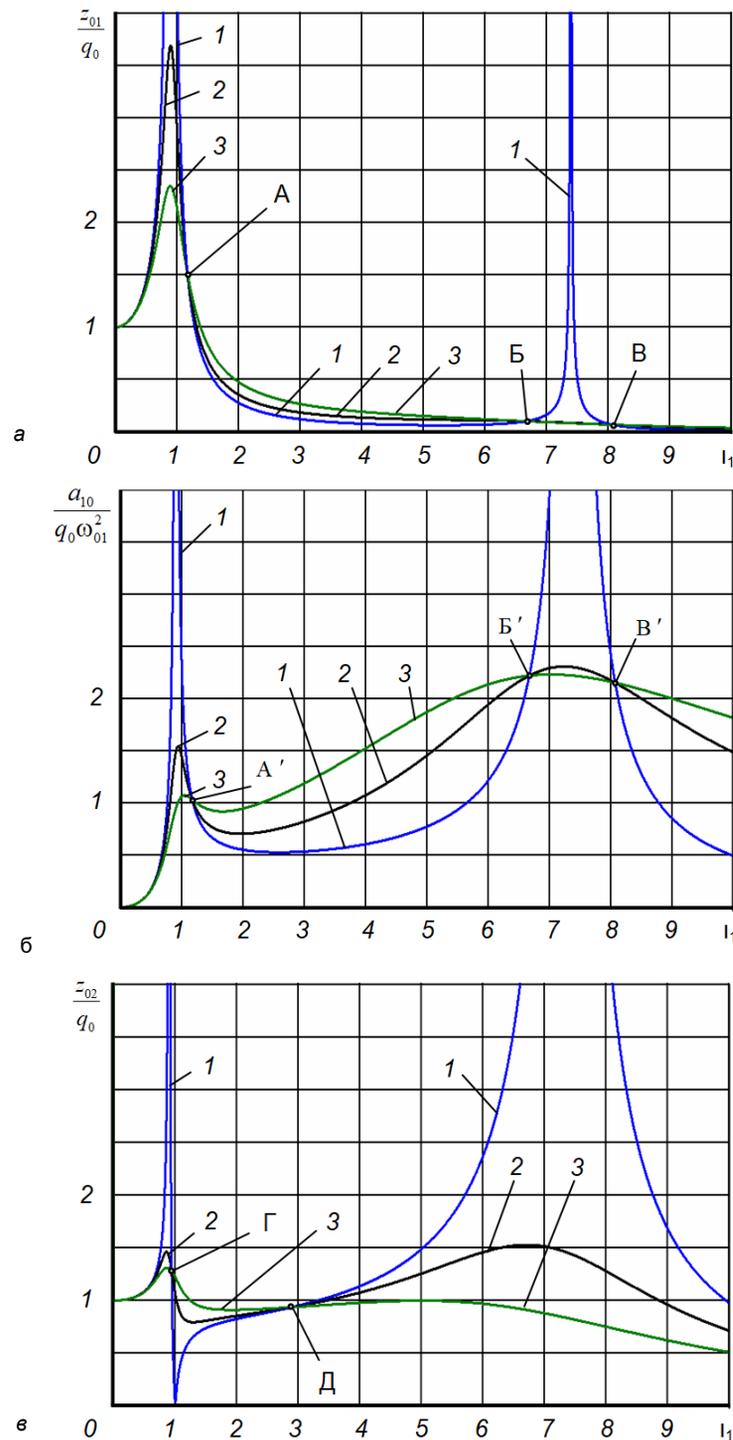


Рисунок 2 – Амплитудно-частотные характеристики перемещений и ускорений поддресоренной (а, б) и перемещений неподдресоренной (в) масс двухмассовой колебательной системы с кинематическим воздействием при отсутствии демпфирования в шине и различных уровнях демпфирования в подвеске: 1 – $\psi_1 = 0$; 2 – $\psi_1 = 0,2$; 3 – $\psi_1 = 0,35$; А, Б, В, Г, Д, А', Б', В' – инвариантные точки
 Источник: составлено авторами.

Figure 2 – Amplitude-frequency characteristics of movements and accelerations of sprung (a, б) and movements of unsprung (в) masses of a two-mass oscillatory system with kinetic action in the absence of damping in the tire and various levels of damping in the suspension: 1 – $\psi_1 = 0$; 2 – $\psi_1 = 0,2$; 3 – $\psi_1 = 0,35$; А, Б, В, Г, Д, А', Б', В' – invariant points
 Source: compiled by authors.

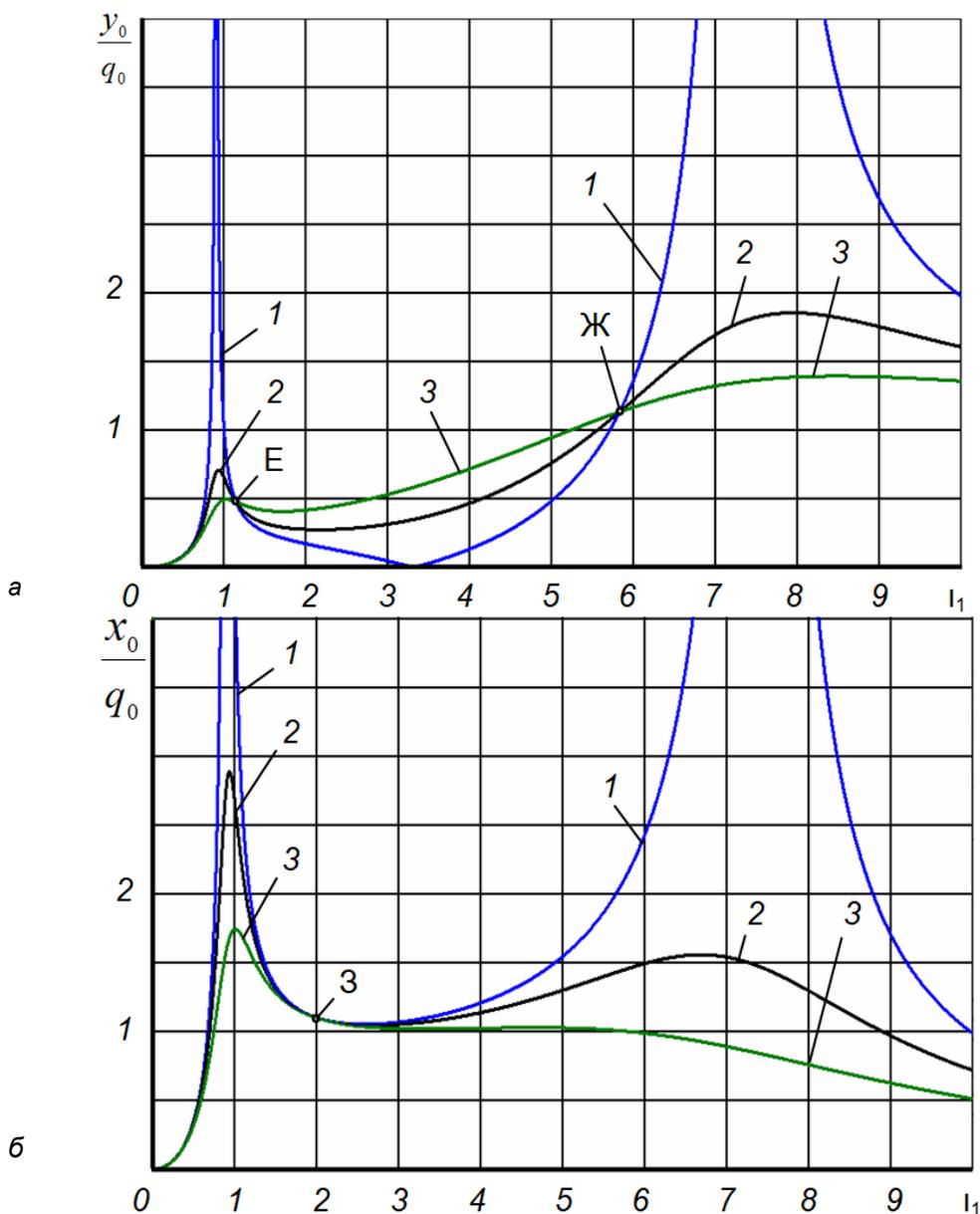


Рисунок 3 – Амплитудно-частотные характеристики деформаций шин (а) и подвески (б) в двухмассовой колебательной системе с кинематическим воздействием при отсутствии демпфирования в шине и различных величинах демпфирования в подвеске (составлено авторами):

1 – $\psi_1 = 0$; 2 – $\psi_1 = 0,2$; 3 – $\psi_1 = 0,35$;

E, Ж, 3 – инвариантные точки

Источник: составлено авторами.

Figure 3 – Amplitude-frequency characteristics of deformations of tires (a) and suspension (b) in a two-mass oscillatory system with cinematic action in the absence of damping in the tire and various damping values in the suspension:

1 – $\psi_1 = 0$; 2 – $\psi_1 = 0,2$; 3 – $\psi_1 = 0,35$;

E, Ж, 3 – invariant points

Source: compiled by authors.

Используем обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \omega_{01}^2; \\ b &= 2\omega; \\ c &= \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4; \\ d &= 2\omega(\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2). \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство для расчета инвариантных точек:

$$\omega_{01}^2 \cdot 2\omega(\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2) = \pm 2\omega \cdot (\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4). \quad (42)$$

Первое очевидное решение $\omega = 0$ на графиках точкой не обозначено. Найдём остальные решения. Рассмотрим два условия:

$$\begin{aligned} 1) \quad \omega_{01}^2 \cdot (\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2) &= \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4; \\ 2) \quad \omega_{01}^2 \cdot (\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2) &= -(\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4). \end{aligned}$$

В соответствии с этими условиями получим решения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{02}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{2(1 + \mu)\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \sqrt{4(1 + \mu)^2 \omega_{01}^4 + 4(\mu - 1)\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 + \omega_{02}^4}}{2}}; \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{2(1 + \mu)\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \sqrt{4(1 + \mu)^2 \omega_{01}^4 + 4(\mu - 1)\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 + \omega_{02}^4}}{2}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Расположив эти частоты в порядке возрастания, получим абсциссы, соответственно, точек А, Б и В. При тех же частотах существуют инвариантные точки на амплитудно-частотных характеристиках ускорений (точки А', Б', В' на рисунке 2, б).

Аналогично, используя выражения для расчета амплитуд перемещений неподрессоренной массы и деформаций шин, получим абсциссы инвариантных точек Г, Д, Е и Ж.

Амплитудно-частотные характеристики деформаций подвески точек пересечений не имеют, но имеют точку касания (точка З на рисунке 3, б), в которой амплитуды деформаций подвески при установившихся колебаниях постоянны, независимо от демпфирования в подвеске.

Рассмотрим выражение для расчета значений амплитуд деформаций шин:

$$x_0 = q_0 \sqrt{\frac{\omega^4 \omega_{02}^4}{[\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2 \mu + \omega_{02}^2) \cdot \omega^2 + \omega^4]^2 + 4h_1^2 \omega^2 [\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2]^2}}. \quad (43)$$

Корень квадратный в правой части выражения также можно представить в виде (36) при условии, что $b(\omega) = 0$. В этом случае получаем равенство для расчета инвариантной точки:

$$\omega^2 \omega_{02}^2 \cdot 2\omega(\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2) = 0. \quad (44)$$

Исключая очевидное решение $\omega = 0$, получим

$$\omega_{02}^2 - (1 + \mu) \cdot \omega^2 = 0. \quad (45)$$

Из выражения (45) видно, что частота в инвариантной точке зависит от парциальной собственной частоты неподдрессоренной массы и отношения поддрессоренной и неподдрессоренной масс, амплитуда в этой точке зависит от амплитуды воздействия и отношения поддрессоренной и неподдрессоренной масс:

$$\omega_3 = \frac{\omega_{02}}{\sqrt{1+\mu}}, \quad x_{03} = q_0 \frac{1+\mu}{\mu}. \quad (46)$$

Выражение (41) в этом случае имеет вид:

$$-\omega^4 \omega_{02}^4 \cdot 4\omega^2 (\omega_{02}^2 - (1+\mu) \cdot \omega^2)^2. \quad (47)$$

Выражение (47) отрицательно во всем диапазоне частот ω , что свидетельствует о том, что точка $(\omega_3; x_{03})$ является точкой касания, и при увеличении демпфирования амплитуда деформаций подвески уменьшается во всем диапазоне частот.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем результаты расчетов инвариантных точек:

$$\begin{aligned} \omega_A &= \sqrt{\frac{2(1+\mu)\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \sqrt{4(1+\mu)^2 \omega_{01}^4 + 4(\mu-1)\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 + \omega_{02}^4}}{2}}, \\ \omega_B &= \omega_{02}, \\ \omega_B &= \sqrt{\frac{2(1+\mu)\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \sqrt{4(1+\mu)^2 \omega_{01}^4 + 4(\mu-1)\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 + \omega_{02}^4}}{2}}, \\ \omega_\Gamma &= \sqrt{\frac{(\omega_{01}^2(1+\mu) + \omega_{02}^2) - \sqrt{(\omega_{01}^2(1+\mu) + \omega_{02}^2)^2 - 2(2+\mu)\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2+\mu}}, \\ \omega_\Delta &= \sqrt{\frac{(\omega_{01}^2(1+\mu) + \omega_{02}^2) + \sqrt{(\omega_{01}^2(1+\mu) + \omega_{02}^2)^2 - 2(2+\mu)\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2+\mu}}, \\ \omega_E &= \sqrt{\frac{2\omega_{01}^2(1+\mu)^2 + \omega_{02}^2(2+\mu) - \sqrt{4\omega_{01}^4(1+\mu)^4 + 4\omega_{01}^2 \omega_{02}^2(1+\mu)^2(\mu-2) + \omega_{02}^4(2+\mu)^2}}{4(1+\mu)}}, \\ \omega_\text{Ж} &= \sqrt{\frac{2\omega_{01}^2(1+\mu)^2 + \omega_{02}^2(2+\mu) + \sqrt{4\omega_{01}^4(1+\mu)^4 + 4\omega_{01}^2 \omega_{02}^2(1+\mu)^2(\mu-2) + \omega_{02}^4(2+\mu)^2}}{4(1+\mu)}}, \\ \omega_3 &= \frac{\omega_{02}}{\sqrt{1+\mu}}. \end{aligned} \quad (48)$$

$$c_{\text{отн}} = \frac{\omega_{02}^2}{\mu\omega_{01}^2}$$

Используя обозначение $c_{\text{отн}}$, можно записать абсциссы инвариантных точек в виде относительных частот (см. рисунок 2, а, в, рисунок 3):

$$\begin{aligned}
v_{1A} &= \sqrt{\frac{2(1+\mu) + \mu c_{\text{отн}} - \sqrt{4(1+\mu)^2 + 4(\mu-1)\mu c_{\text{отн}} + \mu^2 c_{\text{отн}}^2}}{2}}, \\
v_{1B} &= \mu c_{\text{отн}}, \\
v_{1B} &= \sqrt{\frac{2(1+\mu) + \mu c_{\text{отн}} + \sqrt{4(1+\mu)^2 + 4(\mu-1)\mu c_{\text{отн}} + \mu^2 c_{\text{отн}}^2}}{2}}, \\
v_{1Г} &= \sqrt{\frac{1+\mu + \mu c_{\text{отн}} - \sqrt{(1+\mu + \mu c_{\text{отн}})^2 - 2\mu(2+\mu)c_{\text{отн}}}}{2+\mu}}, \\
v_{1Д} &= \sqrt{\frac{1+\mu + \mu c_{\text{отн}} + \sqrt{(1+\mu + \mu c_{\text{отн}})^2 - 2\mu(2+\mu)c_{\text{отн}}}}{2+\mu}}, \\
v_{1E} &= \sqrt{\frac{2(1+\mu)^2 + \mu c_{\text{отн}}(2+\mu) - \sqrt{4(1+\mu)^4 + 4\mu c_{\text{отн}}(1+\mu)^2(\mu-2) + \mu^2 c_{\text{отн}}^2(2+\mu)^2}}{4(1+\mu)}}, \\
v_{1Ж} &= \sqrt{\frac{2(1+\mu)^2 + \mu c_{\text{отн}}(2+\mu) + \sqrt{4(1+\mu)^4 + 4\mu c_{\text{отн}}(1+\mu)^2(\mu-2) + \mu^2 c_{\text{отн}}^2(2+\mu)^2}}{4(1+\mu)}}, \\
v_{13} &= \sqrt{\frac{c_{\text{отн}}\mu}{1+\mu}}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Последнему случаю соответствует ордината в относительных величинах

$$K_{x3} = \frac{1+\mu}{\mu}. \tag{50}$$

Диапазоны частот $(0; \omega_A)$ и $(\omega_B; \omega_B)$, в которых увеличение демпфирования приводит к снижению амплитуд колебаний подрессоренной массы, можно назвать областями резонансов, а диапазоны $(\omega_A; \omega_B)$ и $(\omega_B; \infty)$ – межрезонансной и зарезонансной областями соответственно. В случае неподдресоренной массы инвариантные точки не выделяют явно резонансные, межрезонансные и зарезонансные области частот. В диапазонах частот $(0; \omega_{Г})$ и $(\omega_{Д}; \infty)$ увеличение демпфирования приводит к снижению амплитуд ее колебаний, а в диапазоне $(\omega_{Г}; \omega_{Д})$ – к их существенному возрастанию.

Амплитудно-частотные характеристики деформаций шин при отсутствии в них демпфирования (см. рисунок 3, а) имеют две инвариантные точки, делящие частоты колебаний на три диапазона. В диапазонах частот $(0; \omega_E)$ и $(\omega_{Ж}; \infty)$ увеличение демпфирования приводит к уменьшению амплитуд деформаций шин, а в диапазоне $(\omega_E; \omega_{Ж})$ – к их увеличению.

Наличие на амплитудно-частотной характеристике больших амплитуд деформаций шин свидетельствуют о значительном риске отрыва шин от дороги в процессе движения автомобиля. Потеря контакта шин с дорогой ухудшает важные для безопасности автомобиля эксплуатационные свойства: устойчивость и управляемость движения, а также тормозные свойства.

Увеличение демпфирования в подвеске уменьшает амплитуды деформаций подвески, следовательно, снижает риск отрывов и пробоев подвески. Однако деформации подвески влияют на потери энергии в амортизаторах. Рассмотрим эти потери и влияние на них амплитуд деформаций подвески.

Полная работа амортизатора в колебательной системе за цикл колебаний [4]:

$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_d(t) \dot{x}(t) dt \tag{51}$$

Здесь $F_d(t) = k_1 \dot{x}(t)$ – сила демпфирования, $\dot{x} = x_0 \omega \cos(\omega t + \beta_{x/q})$ – скорость деформации подвески. Тогда

$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} k_1 \dot{x}^2(t) dt = k_1 x_0^2 \omega \pi \tag{52}$$

Используя формулу (33) для амплитуды деформаций подвесок в относительных величинах, получим

$$A = kq_0^2 \omega \pi \frac{v_1^4}{(1 - v_2^2 - v_2^2 \mu - v_1^2 + v_1^2 v_2^2)^2 + 4\psi_1^2 v_1^2 (1 - v_2^2 - v_2^2 \mu)^2} \tag{53}$$

или

$$A = m_1 q_0^2 \omega_{01}^2 \pi \frac{2\psi_1 v_1^5}{(1 - v_2^2 - v_2^2 \mu - v_1^2 + v_1^2 v_2^2)^2 + 4\psi_1^2 v_1^2 (1 - v_2^2 - v_2^2 \mu)^2} \tag{54}$$

Введем обозначение для относительной работы амортизатора за цикл колебаний:

$$A_{\text{отн}} = \frac{2A}{m_1 q_0^2 \omega_{01}^2} \tag{55}$$

Здесь $\frac{m_1 q_0^2 \omega_{01}^2}{2} = \frac{c_1 q_0^2}{2}$ – энергия, запасенная в упругом элементе подвески при его деформации на величину амплитуды кинематического воздействия.

Тогда относительная работа амортизатора за цикл колебаний:

$$A_{\text{отн}} = \frac{2\psi_1 v_1^5 \cdot 2\pi}{(1 - v_2^2 - v_2^2 \mu - v_1^2 + v_1^2 v_2^2)^2 + 4\psi_1^2 v_1^2 (1 - v_2^2 - v_2^2 \mu)^2} \tag{56}$$

На рисунке 4 показана зависимость относительной работы амортизатора за цикл колебаний от относительной частоты кинематического воздействия v_1 при различных уровнях демпфирования в подвеске.

Как видно из формул (53), (54), (56) и из графиков на рисунке 4, работа (относительная работа) амортизатора и, следовательно, потери энергии в нем за цикл колебаний зависят от частоты колебаний и демпфирования в подвеске. С понижением демпфирования потери энергии возрастают в зонах обоих резонансов, а в межрезонансной и зарезонансной зонах – уменьшаются. При этом с понижением демпфирования интервалы роста потерь энергии уменьшаются, поэтому графики зависимости

потерь энергии от частоты колебаний не имеют инвариантных точек.

На рисунке 5 сопоставлены графики, характеризующие плавность хода, безотрывное качение колеса и потери энергии в подвеске.

Сопоставление графиков показывает, что:

1) диапазоны частот первого резонанса колебаний поддресоренной массы и деформаций шин практически совпадают (в силу близости абсцисс точек А и Е);

2) межрезонансная зона для деформаций шин значительно уже аналогичной зоны для перемещений и ускорений поддресоренной массы, поскольку абсциссы точек Б и Ж существенно различны;

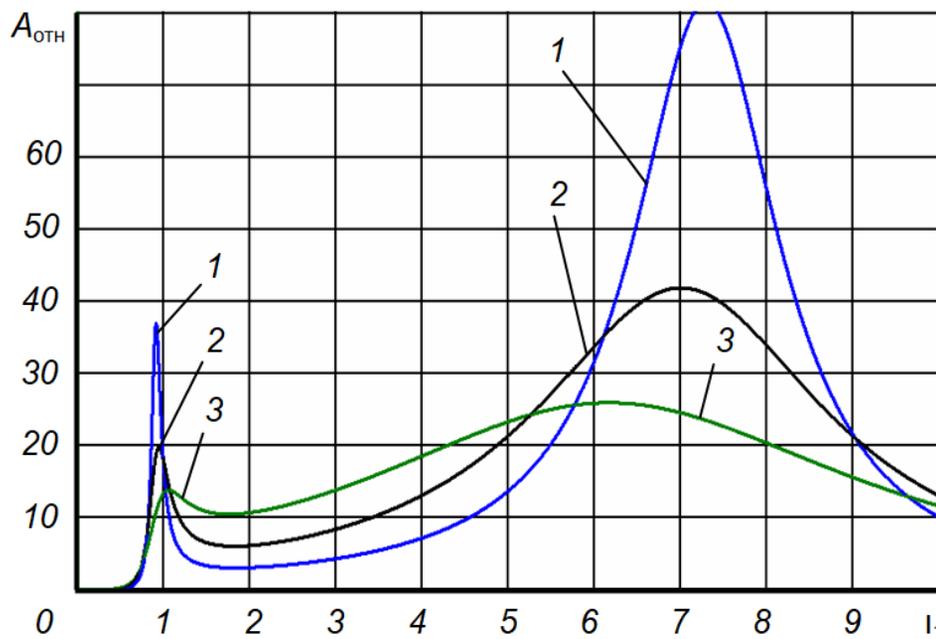


Рисунок 4 – Зависимость относительной работы амортизатора за цикл колебаний от относительной частоты кинематического воздействия i_1 при различных уровнях демпфирования в подвеске: 1 – $\psi_1 = 0,1$; 2 – $\psi_1 = 0,2$; 3 – $\psi_1 = 0,35$
Источник: составлено авторами.

Figure 4 – The dependence of the relative operation of the shock absorber during the oscillation cycle on the relative frequency of the kinematic effect of i_1 at different levels of damping in the suspension: 1 – $\psi_1 = 0,1$; 2 – $\psi_1 = 0,2$; 3 – $\psi_1 = 0,35$
Source: compiled by authors.

3) повышение демпфирования в области первого резонанса и в области второго резонанса для подрессоренной массы приводит к повышению плавности хода на этих частотах, к стабилизации контакта колес с дорогой и к снижению потерь энергии в подвеске;

4) понижение демпфирования в межрезонансной области частот для деформаций шин приводит к повышению плавности хода, к стабилизации контакта колес с дорогой и к снижению потерь энергии в подвеске;

5) в диапазонах частот между точками Ж и Б, а также за точкой В (заштрихованные области на рисунке 5) возникают следующие противоречия: увеличение демпфирования приводит к стабилизации контакта колес с дорогой, но способствует снижению плавности хода; при этом тепловыделение в амортиза-

торах вблизи второго резонанса существенно снижается, а с увеличением частоты колебаний в зарезонансной области незначительно возрастает;

6) существенные противоречия между плавностью хода, с одной стороны, и стабильностью контакта колеса с дорогой, а также снижением тепловыделения и потерь энергии в амортизаторах, с другой стороны, возникают вблизи второго резонанса подрессоренной массы слева и справа; при увеличении частоты колебаний в зарезонансной зоне эти противоречия сглаживаются, и понижение демпфирования на этих частотах приводит к значительному повышению плавности хода, снижению тепловыделения, практически не влияя на контакт колеса с дорогой.

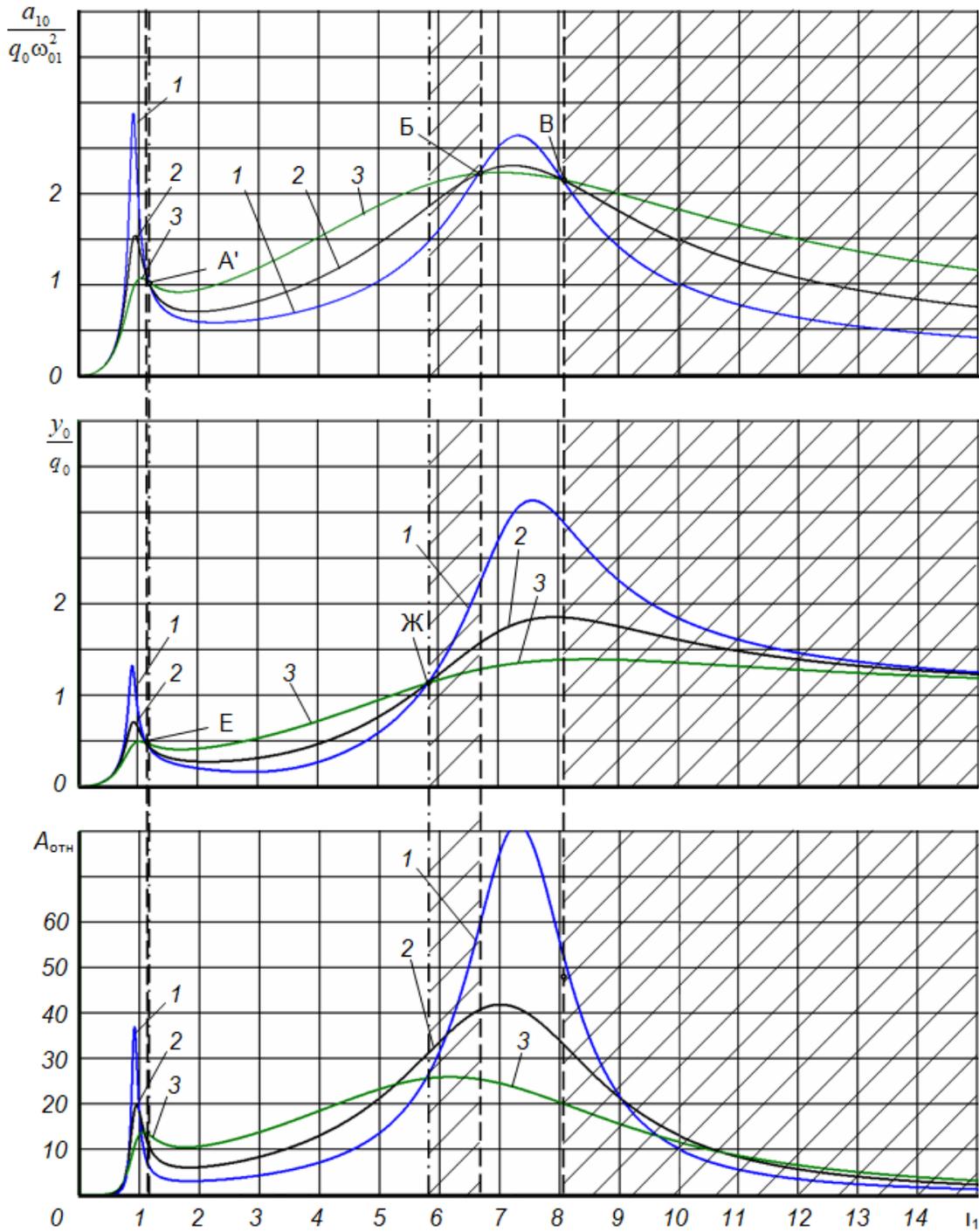


Рисунок 5 – Сопоставление графиков, характеризующих плавность хода, безотрывное качение колеса и потери энергии в подвеске при различных уровнях демпфирования в подвеске (составлено авторами):

1 – $\psi_1 = 0,1$; 2 – $\psi_1 = 0,2$; 3 – $\psi_1 = 0,35$

Источник: составлено авторами.

Figure 5 – Comparison of graphs characterizing, respectively, smooth running, continuous rolling of the wheel and energy loss in the suspension at different levels of damping in the suspension:

1 – $\psi_1 = 0,1$; 2 – $\psi_1 = 0,2$; 3 – $\psi_1 = 0,35$

Source: compiled by authors.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведена расчетная схема и уравнения динамики двухмассовой колебательной системы, эквивалентной автомобильной подвеске. Предложена методика расчета инвариантных точек для одноопорных колебательных систем, в которых пересекаются или касаются амплитудно-частотные характеристики для различных уровней демпфирования. Рассчитаны частоты, соответствующие инвариантным точкам в двухмассовой колебательной системе. Предложено понятие «относительная работа амортизатора за цикл колебаний» и приведена формула для расчета относительной работы амортизатора в двухмассовой колебательной системе. Впервые проведен сравнительный анализ графиков, характеризующих плавность хода, отвечающую за сохранность грузов, безотрывное качение колеса и потери энергии в подвеске. Выявлено, что:

1) диапазоны частот первого резонанса колебаний подрессоренной массы и деформаций шин практически совпадают (в силу близости абсцисс точек А и Е);

2) межрезонансная зона для деформаций шин значительно уже аналогичной зоны для перемещений и ускорений подрессоренной массы, поскольку абсциссы точек Б и Ж существенно различны;

3) повышение демпфирования в области первого резонанса и в области второго резонанса для подрессоренной массы приводит к повышению плавности хода на этих частотах, к стабилизации контакта колес с дорогой и к снижению потерь энергии в подвеске;

4) понижение демпфирования в межрезонансной области частот для деформаций шин приводит к повышению плавности хода, к стабилизации контакта колес с дорогой и к снижению потерь энергии в подвеске;

5) в диапазонах частот между точками Ж и Б, а также за точкой В (заштрихованные области на рисунке 5) возникают следующие противоречия: увеличение демпфирования приводит к стабилизации контакта колес с дорогой, но способствует снижению плавности хода; при этом тепловыделение в амортизаторах вблизи второго резонанса существенно снижается, а с увеличением частоты колебаний в зарезонансной области незначительно возрастает;

6) существенные противоречия между плавностью хода, с одной стороны, и стабильностью контакта колеса с дорогой, а также

снижением тепловыделения и потерь энергии в амортизаторах, с другой стороны, возникают вблизи второго резонанса подрессоренной массы слева и справа; при увеличении частоты колебаний в зарезонансной зоне эти противоречия сглаживаются, и понижение демпфирования на данных частотах приводит к значительному повышению плавности хода, снижению тепловыделения, практически не влияя на контакт колеса с дорогой.

Таким образом, проведенный сравнительный анализ показывает, что в одних диапазонах частот увеличение демпфирования одновременно улучшает плавность хода, стабильность контакта колеса с дорогой и снижает потери энергии в амортизаторах, в других диапазонах частот увеличение демпфирования одновременно приводит все эти свойства к обратным последствиям, а в третьих диапазонах частот увеличение демпфирования вызывает противоречия между этими свойствами. В связи с этим в случае применения нерегулируемых подвесок не удастся найти оптимальное демпфирование, удовлетворяющее всех трем условиям (плавности хода, безопасности и энергоэффективности) во всем частотном диапазоне транспортной вибрации. Поэтому нужно либо находить компромиссное решение, частично удовлетворяющее всем этим условиям, либо разрабатывать адаптивные подвески с саморегулируемыми характеристиками, которые автоматически меняют сопротивление в зависимости от режимов колебаний. Кроме того, перспективным направлением является разработка подвесок с регулированием демпфирования в цикле колебаний, что позволяет существенно уменьшить потери энергии в подвеске при одновременном повышении ее виброзащитных свойств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хачатуров А. А. Динамика системы «дорога – шина – автомобиль – водитель» / А. А. Хачатуров, Л. В. Афанасьев, В. С. Васильев [и др.]; под ред. А. А. Хачатурова. М.: Машиностроение, 1976. 535 с.
2. Ротенберг Р. В. Подвеска автомобиля. Колебания и плавность хода. 3-е изд. М.: Машиностроение, 1972. 392 с.
3. Дербаремдикер А. Д. Гидравлические амортизаторы автомобилей. М.: Машиностроение, 1969. 236 с.
4. Дербаремдикер А. Д. Амортизаторы транспортных машин. М.: Машиностроение, 1985. 200 с.
5. Ротенберг Р. В. Подвеска автомобиля и его колебания. 2-е изд. М.: Машгиз, 1960. 356 с.
6. Ден-Гартог, Дж. П. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 580 с.

7. Яценко Н. Н., Прутчиков О. К. Плавность хода грузовых автомобилей. М.: Машиностроение, 1969. 219 с.

8. Силаев А. А. Спектральная теория поддресоривания транспортных машин. М.: Машиностроение, 1972. 192 с.

9. Барский И. Б., Анилович В. Я., Кутьков Г. М. Динамика трактора. М.: Машиностроение, 1973. 280 с.

10. Успенский И. Н., Мельников А. А. Проектирование подвески автомобиля. М.: Машиностроение, 1976. 168 с.

11. Фролов К. В., Фурман Ф. А. Прикладная теория виброзащитных систем. М.: Машиностроение, 1980. 276 с.

12. Вонг Дж. Теория наземных транспортных средств: пер. с англ. М.: Машиностроение, 1982. 284 с.

13. Рябов И.М. Распределение энергии в цикле колебаний подвески АТС // Справочник. Инженерный журнал. 1998. № 4. С. 31–33.

14. Рябов И. М., Чернышов К. В., Поздеев А. В. Energy Analysis of Vehicle Suspension Oscillation Cycle // Procedia Engineering. Vol. 150: 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016) / ed. by A.A. Radionov. [Elsevier publishing], 2016. P. 384-392.

15. Ryabov I. M., Novikov V.V., Pozdneev A.V. Efficiency of Shock Absorber in Vehicle Suspension // Procedia Engineering. Vol. 150: 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016) / ed. by A.A. Radionov. [Elsevier publishing], 2016. P. 354-362.

16. Рябов И. М. Методика определения условий и продолжительности отрывов колес автомобиля от дороги // Энерго- и ресурсосбережение: промышленность и транспорт / Волгоградский государственный технический университет. Волгоград, 2017. С. 36–43.

17. Novikov V. V., Pozdneev A. V., Chernyshov K. V., Ryabov I. M., Diakov A., Chutkov K. Analysis of the current state of research in the field of improving the smooth ride of vehicles equipped with suspension // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 820: Design Technologies for Wheeled and Tracked Vehicles (MMBC) 2019 (Moscow, Russian Federation, 1-2 October, 2019). [IOP Publishing], 2020. 8 p. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/820/1/012035>. URL: <https://iopscience.iop.org/issue/1757-899X/820/1>.

18. Новиков В. В. Виброзащитные свойства подвесок автотранспортных средств: монография / В. В. Новиков, И. М. Рябов, К. В. Чернышов; ВолгГТУ. 2-е изд., испр. и доп. Москва; Вологда, 2021. 384 с.

REFERENCES

1. Xachaturov A.A., Afanas`ev L. V., Vasil`ev V. S. et al. *Dinamika sistemy` «doroga – shina – avtomobil` – voditel`»* [Dynamics of the “road– tire – car –driver” system]. Moscow, Mashinostroenie, 1976, 535 p. (in Russ.)

2. Rotenberg R. V. *Podveska avtomobilya. Kolebaniya i plavnost` xoda* [The suspension of the car. Oscillation and smoothness of the course]. Moscow, Mashinostroenie, 1972, 392 p. (in Russ.)

3. Derbaremdiker A. D. *Gidravlicheskie amortizatory` avtomobilej* [Hydraulic shock absorbers of cars]. Moscow, Mashinostroenie, 1969, 236 p. (in Russ.)

4. Derbaremdiker A. D. *Amortizatory` transportny`x mashin* [Shock absorbers of transport vehicles]. Moscow, Mashinostroenie, 1985, 200 p. (in Russ.)

5. Rotenberg R. V. *Podveska avtomobilya i ego kolebaniya* [The suspension of the car and its vibrations]. Moscow, Mashgiz, 1960, 356 p. (in Russ.)

6. Den-Gartog G. P. *Mexanicheskie kolebaniya* [Mechanical vibrations]. Moscow, Fizmatgiz, 1960. 580 p. (in Russ.)

7. Yacenko N. N., Prutchikov O. K. *Plavnost` xoda gruzovy`x avtomobilej* [Smooth running of trucks]. Moscow, Mashinostroenie, 1969, 219 p. (in Russ.)

8. Silaev A. A. *Spektral`naya teoriya podressorivaniya transportny`x mashin* [Spectral theory of springing transport vehicles]. Moscow, Mashinostroenie, 1972, 192 p. (in Russ.)

9. Barskij I. B., Anilovich V. Ya., Kut`kov G. M. *Dinamika traktora* [Tractor dynamics]. Moscow, Mashinostroenie, 1973, 280 p. (in Russ.)

10. Uspenskij I. N., Mel`nikov A. A. *Proektirovanie podveski avtomobilya* [Car suspension design]. Moscow, Mashinostroenie, 1976, 168 p.

11. Frolov K. V., Furman F. A. *Prikladnaya teoriya vibrozashhitny`x sistem* [Applied theory of vibration protection systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 276 p. (in Russ.)

12. Vong G. *Teoriya nazemny`x transportny`x sredstv* [Theory of land vehicles]. Moscow, Mashinostroenie, 1982, 284 p.

13. Ryabov, I. M. et al. *Raspredelenie e`nergii v cikle kolebanij podveski ATS* [Energy distribution in the oscillation cycle of the land vehicles suspension]. *Spravochnik. Inzhenery`j zhurnal*. 1998; 4: 31-33. (in Russ.)

14. Ryabov, I. M., Chernyshov K. V., Pozdneev A. V. Energy Analysis of Vehicle Suspension Oscillation Cycle. *Procedia Engineering*. Vol. 150: 2nd *International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016)* / ed. by A.A. Radionov. [Elsevier publishing]. 2016. pp. 384-392. (in Russ.)

15. Ryabov I. M., Novikov, V. V., Pozdneev A. V. Efficiency of Shock Absorber in Vehicle Suspension. *Procedia Engineering*. Vol. 150: 2nd *International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016)* / ed. by A.A. Radionov. [Elsevier publishing], 2016. pp. 354-362.

16. Ryabov I. M. et al. Metodika opredeleniya uslovij i prodolzhitel`nosti otry`vov koles avtomobilya ot dorogi [Methodology for determining the conditions and duration of separation of car wheels from the road]. *E`nergo- i resursosberezhenie: promy`shlennost` i transport*. Volgograd, 2017: 36-43. (in Russ.)

17. Novikov V. V., Pozdneev A. V., Chernyshov K. V., Ryabov, I. M., Diakov A. S., Chutkov K. Analysis of the

current state of research in the field of improving the smooth ride of vehicles equipped with suspension. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 820: Design Technologies for Wheeled and Tracked Vehicles (MMBC) 2019 (Moscow, Russian Federation, 1-2 October, 2019). [IOP Publishing], 2020. 8 p. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/820/1/012035>. URL: <https://iopscience.iop.org/issue/1757-899X/820/1>.

18. Novikov V. V., Ryabov, I. M., Chernyshov K. V. *Vibrozashhitny`e svoystva podvesok avtotransportny`x sredstv* [Vibration-proof properties of suspensions of motor vehicles]. Moscow, Vologda, 2021, 384 p. (in Russ.)

ВКЛАД СОАВТОРОВ

Чернышов К. В. Расчет инвариантных точек и потеря энергии.

Новиков В. В. Заключение, выводы.

Санжапов Р. Р. Введение, выводы.

Котов В. В. Построение графиков, оформление.

CO-AUTHORS' CONTRIBUTION

Konstantin V. Chernyshov. Calculation of invariant points and energy losses.

Viacheslav V. Novikov. Conclusion, conclusions.

Rustam R. Sanzhapov. Introduction, conclusions.

Vladislav V. Kotov. Graphing and design.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Чернышов Константин Владимирович – канд. техн. наук, доц., доц. кафедры «Техническая эксплуатация и ремонт автомобиля».

Новиков Вячеслав Владимирович – д-р техн. наук, проф. кафедры «Автоматические установки».

Санжапов Рустам Рафилевич – канд. техн. наук, доц., доц. кафедры «Автомобильный транспорт».

Котов Владислав Владимирович – канд. техн. наук, доц., доц. кафедры «Техническая эксплуатация и ремонт автомобиля».

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Konstantin V. Chernyshov, Cand. of Sci., Associate Professor of the Technical Operational and Automobile Repair Department.

Viacheslav V. Novikov, Dr. of Sci., Professor of the Automatic Installations Department.

Rustam R. Sanzhapov, Cand. of Tech. Sci., Associate Professor of the Automobile Transport Department.

Vladislav V. Kotov, Cand. of Tech. Sci., Associate Professor of the Technical Operational and Automobile Repair Department.