

УДК 519.612:519.652

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ С ПОМОЩЬЮ «МЕТОДИКИ СДВИГА»

В.А. Федорук

ФГБОУ ВО «СибАДИ», г. Омск, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Для обработки экспериментальных данных на практике широко используют интерполяционные и сглаживающие кубические сплайны. Данная задача является актуальной и привлекает достаточно большое количество исследователей. Для внесения своего вклада в решение этой непростой задачи автором ранее была предложена «методика сдвига». Автор ставит перед собой задачу сравнения своей методики с хорошо известным и широко распространённым методом сплайн-сглаживания.

Методы и материалы. В данной статье сравниваются две методики обработки экспериментальных данных при интерполяции кубическими сплайнами. Первая методика является хорошо известной и основывается на применении сглаживающих кубических сплайнов (сглаживающих сплайнов) при обработке экспериментальных данных. Вторая построена на использовании «методики сдвига», основанной на сдвиге точек сшива фрагментов кубических парабол относительно узлов интерполирования, привязанных к экспериментальным данным. Для сравнения эффективности обеих методик в качестве тестовой кривой было выбрано распределение Гаусса (нормальное распределение).

Результаты и обсуждение. Расчётные данные, полученные по двум вышеуказанным методикам, для их большей наглядности представлены в табличной и графической формах. Как показывают расчёты с помощью «методики сдвига» в узлах, в которых наблюдаются наибольшие отклонения расчётных данных от теоретических значений нормального распределения, удалось уменьшить внесённую в нормальное распределение погрешность в среднем как минимум в два раза.

Заключение. В результате сравнительного анализа полученных по двум методикам расчётных данных автор приходит к выводу, что «методика сдвига» в проведённом тесте показала лучшие результаты, которые хорошо согласуются с нормальным распределением в пределах внесённой в тестовую кривую погрешности.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: экспериментальные данные, интерполяция, узлы интерполирования, сплайны, кубические сплайны, сглаживающие кубические сплайны, методика сдвига

ВВЕДЕНИЕ

Кубические сплайны [1, 2], в силу их простоты, широко применяются на практике [3, 4] для обработки экспериментальных данных. Они лишены недостатков, присущих методам построения интерполяционных полиномов [5], возникающих при большом числе экспериментальных данных.

В случае если погрешности измерений малы и их можно не учитывать, то для обработки экспериментальных данных применяют интерполяционные кубические сплайны [6]. В этом случае построение интерполяционного сплайна осуществляется с помощью фрагментов кубических парабол со сшивкой в точках,

соответствующих экспериментальным данным. Данный подход успешно реализован в таких математических пакетах как MathCAD, MATLAB, Maple [7].

На практике, полученные экспериментальные данные содержат погрешности, которыми пренебречь нельзя. В этом случае применение интерполяционных сплайнов не позволяет построить нужную кривую из-за «жёсткой» привязки узлов интерполирования к экспериментальным данным.

Поэтому, чтобы получить более гладкие аппроксимирующие кривые, проходящие вблизи значений экспериментальных точек, необходимо использовать сглаживающие сплайны [8]. Построение таких сплайнов является задачей нелинейного программирования и реализуется с помощью численных методов [9, 10, 11].

В статье [12] предлагается другой, более простой (без использования нелинейного программирования), но не менее эффективный подход для того, чтобы обойти ограничение по привязке узлов интерполирования к экспериментальным (табличным) данным при использовании интерполяционных кубических сплайнов. Этот метод реализует интерполяцию табличных данных кубическими сплайнами [6] с применением «методики сдвига» [12].

Целью данной статьи является сравнение эффективности двух методик обработки экспериментальных данных при интерполяции кубическими сплайнами, одна из которых достаточно хорошо известна и основывается на применении сглаживающих сплайнов [8] при обработке табличных данных, а другая построена на использовании «методики сдвига» [12], основанной на сдвиге точек шива фрагментов кубических парабол относительно узлов интерполирования, привязанных к табличным данным. Для сравнения эффективности обеих методик в качестве тестовой кривой было выбрано нормальное распределение.

МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ

Первая методика является достаточно хорошо известной и представляет из себя широко распространённый метод сплайн-сглаживания [8], реализуемый на практике численными методами [9, 10, 11].

Согласно этому методу аналитическое выражение для кубического сплайна имеет следующий вид

$$\varphi(x) = K_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + K_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \frac{x_i - x}{h_i} \left(y_{i-1} - \frac{K_{i-1}h_i^2}{6} \right) + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \left(y_i - \frac{K_i h_i^2}{6} \right), \quad i = 2, \dots, N,$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 2, \dots, N$.

Коэффициенты K_i ($i = 1, \dots, N$) сглаживающего сплайна находятся путём решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c_1 K_1 + b_1 K_2 + a_1 K_3 &= d_1, \\ b_1 K_1 + c_2 K_2 + b_2 K_3 + a_2 K_4 &= d_2, \\ a_{i-2} K_{i-2} + b_{i-1} K_{i-1} + c_i K_i + b_i K_{i+1} + a_i K_{i+2} &= d_i, \quad i = 3, \dots, N-2, \\ a_{N-3} K_{N-3} + b_{N-2} K_{N-2} + c_{N-1} K_{N-1} + b_{N-1} K_N &= d_{N-1}, \\ a_{N-2} K_{N-2} + b_{N-1} K_{N-1} + c_N K_N &= d_N. \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты этой системы определяются по формулам

$$c_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{3} + \frac{1}{h_i^2} \rho_{i-1} + \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right)^2 \rho_i + \frac{1}{h_{i+1}^2} \rho_{i+1}, \quad i = 2, \dots, N-1, \tag{2}$$

$$b_i = \frac{h_{i+1}}{6} - \frac{1}{h_{i+1}} \left[\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \rho_i + \left(\frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_{i+2}} \right) \rho_{i+1} \right], \quad i = 2, \dots, N-2, \tag{3}$$

$$a_i = \frac{\rho_{i+1}}{h_{i+1} h_{i+2}}, \quad i = 2, \dots, N-3, \tag{4}$$

а правые части системы

$$d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (5)$$

Если сглаживающий сплайн является естественным, т. е. $K_1 = K_N = 0$, то краевые условия имеют вид

$$c_1 = c_N = 1, \\ b_1 = a_1 = a_{N-2} = b_{N-1} = d_1 = d_N = 0.$$

В формулах (2) – (4) $\rho_i > 0$ – заданные весовые коэффициенты. Если $\rho_i = 0$, то $\varphi(x_i) = y_i$, т. е. в точке x_i значение сглаживающего сплайна совпадает со значением функции в этой точке. Таким образом, чем меньше выбрано значение коэффициента ρ_i , тем ближе функция $\varphi(x_i)$ в точке x_i соответствует табличному значению y_i .

Пятидиагональная матрица (1) с коэффициентами, определяемыми по формулам (2) – (5), представляет собой систему линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов можно найти с помощью метода прогонки [13].

После вычисления коэффициентов K_i сглаживающего сплайна искомые сглаженные значения точек экспериментальных данных в узлах x_i определяются по формулам

$$z_i = y_i - \rho_i D_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

$$D_1 = \frac{K_2 - K_1}{h_2}, \quad D_N = -\frac{K_N - K_{N-1}}{h_N}, \\ D_i = \frac{K_{i+1} - K_i}{h_{i+1}} - \frac{K_i - K_{i-1}}{h_i}, \quad i = 2, \dots, N-1.$$

Вторая методика обработки экспериментальных данных разработана автором и основана на использовании «методики сдвига» [12].

Для сравнения эффективности двух вышеуказанных методик обработки экспериментальных данных, основные положения одной из которых рассмотрены выше, а вторая подробно описана автором в статье [12], в качестве теоретической (тестовой) кривой было выбрано распределение Гаусса или нормальное распределение. В дополнение приводится пример обработки экспериментальных данных двумя методиками для спектра внутреннего трения эпоксидного полимера (ЭП) на основе эпоксиноволачной смолы УП-643 [14], сокращённо ЭП УП-643.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Экспериментальные данные y_i^e , приведённые в таблице 1, были получены из тестовой кривой y_i^t с внесением в неё случайным образом (с помощью датчика случайных чисел) погрешностей, не превышающих 10%.

Исходные и расчётные данные для нормального распределения, полученные при использовании «методики сдвига» [12] при коэффициенте сдвига $ko_shift = 14$, приведены в таблице 1. Методика получения этих данных подробно описана в статье [12].

Для проведения расчётов по методике, основанной на применении сглаживающих сплайнов, сначала была изучена теория широко распространённого метода сплайн-сглаживания [8], практическая реализация которого сводится к использованию формул (2) – (5) для нахождения искомых сглаженных значений точек экспериментальных данных в узлах x_i по формуле (6). Далее была написана программа на языке программирования Microsoft Fortran PowerStation 4.0 [15], с помощью которой и были выполнены расчёты с весовыми коэффициентами ρ в диапазоне от 0,001 до 0,1. Наиболее оптимальным значением весового коэффициента, дающего наиболее лучший результат, оказалось $\rho = 0,01$.

В таблице 1 (для сравнения) приведены данные расчётов по двум методикам для нормального распределения в диапазоне $x = 3 \div 7$.

Таблица 1

ДАННЫЕ РАСЧЁТОВ ПО ДВУМ МЕТОДИКАМ ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
Table 1
DATA OF CALCULATIONS BY TWO METHODS

x_i	y_i^t	y_i^e	z_i	y_i^{14}
	Без погрешности	Погрешность 0 – 10%	$\rho = 0,01$	$ko_shift = 14$
3,00	0,0540	0,0591	0,0531	0,0547
3,25	0,0863	0,0777	0,0798	0,0834
3,50	0,1295	0,1180	0,1146	0,1268
3,75	0,1826	0,1707	0,1901	0,1827
4,00	0,2420	0,2644	0,2417	0,2376
4,25	0,3011	0,2763	0,2751	0,2873
4,50	0,3521	0,3192	0,3407	0,3370
4,75	0,3867	0,4098	0,4078	0,3838
5,00	0,3989	0,4313	0,4019	0,4037
5,25	0,3867	0,3625	0,3830	0,3886
5,50	0,3521	0,3604	0,3691	0,3550
5,75	0,3011	0,3297	0,3043	0,3050
6,00	0,2420	0,2195	0,2340	0,2405
6,25	0,1826	0,1702	0,1671	0,1753
6,50	0,1295	0,1166	0,1253	0,1231
6,75	0,0863	0,0946	0,0871	0,0864
7,00	0,0540	0,0529	0,0536	0,0566

На рисунках 1-3 приведены для сравнения на примере нормального распределения: теоретическая и расчётная ($ko_shift = 14$) кривые (рис. 1); теоретическая и расчётная ($\rho = 0,01$) кривые (рис. 2); теоретическая и расчётные (по двум методикам) кривые (рис. 3).

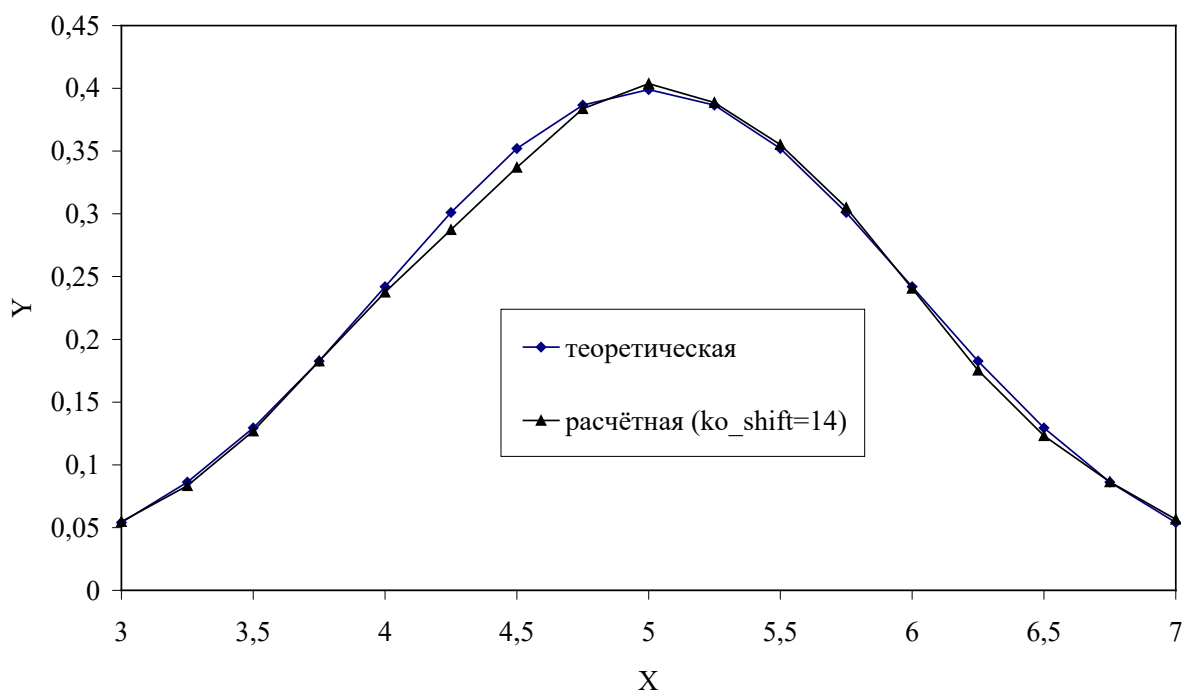


Рисунок 1 – Теоретическая и расчётная (при $ko_shift=14$) кривые нормального распределения
Figure 1 – Theoretical and calculated (for $ko_shift=14$) curves

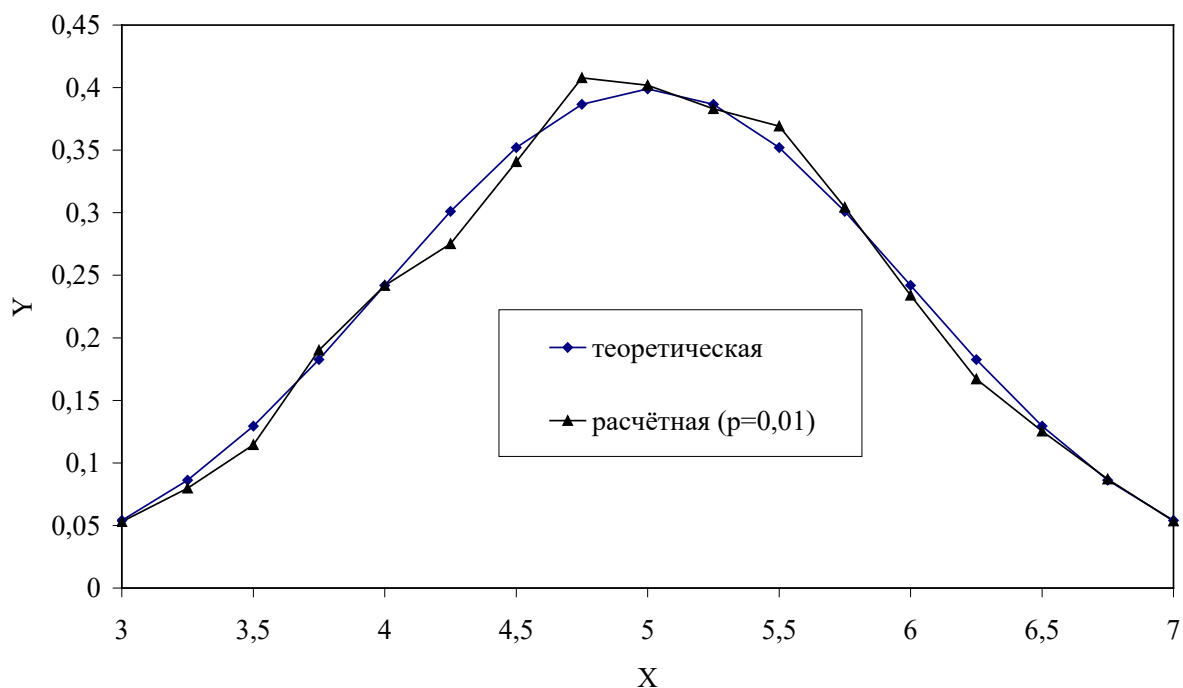


Рисунок 2 – Теоретическая и расчётная (при $p=0,01$) кривые нормального распределения
Figure 2 – Theoretical and calculated (for $p=0,01$) curves

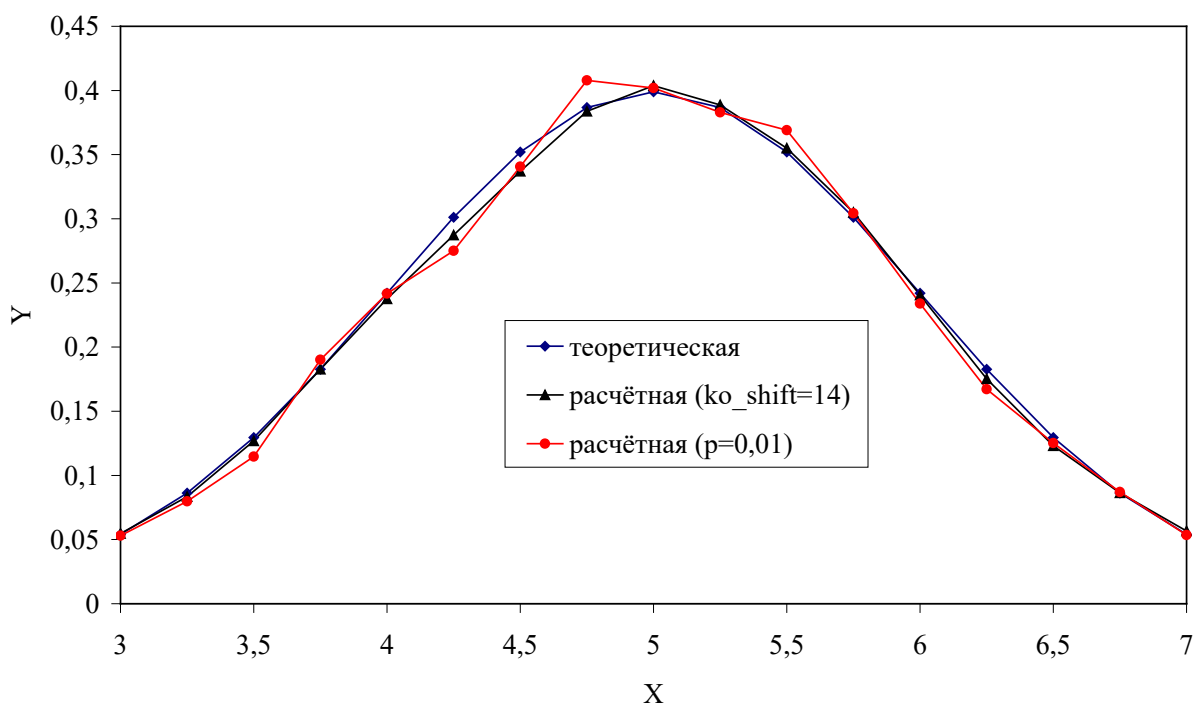


Рисунок 3 – Теоретическая и расчётные (по двум методикам) кривые
Figure 3 – Theoretical and calculated (by two methods) curves

В таблице 2 для сравнения эффективности вышеуказанных методик приведены относительные погрешности расчётных данных по отношению к теоретическим значениям для нормального распределения, посчитанные на основании данных таблицы 1.

Во втором столбце данной таблицы указаны погрешности, внесённые для каждого узла в тестовую кривую с помощью датчика случайных чисел в диапазоне от 0 до 10%.

Таблица 2
ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЁТНЫХ ДАННЫХ (В ПРОЦЕНТАХ) ПО ДВУМ МЕТОДИКАМ ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
Table 2
RELATIVE ERRORS OF CALCULATED DATA (IN PERCENTAGES) BY TWO METHODS

x_i	$\frac{ y_i^t - y_i^e }{y_i^t} \cdot 100\%$	$\frac{ y_i^t - z_i }{y_i^t} \cdot 100\%$	$\frac{ y_i^t - y_i^4 }{y_i^t} \cdot 100\%$
3,50	8,8	11,5	2,1
4,25	8,2	8,6	4,6
4,50	9,3	3,2	4,3
4,75	6,0	5,5	0,75
5,50	2,4	4,8	0,82
6,25	6,8	8,5	4,0

В таблице 2 указаны только те узловые точки (узлы) x_i , в которых наблюдаются наибольшие отклонения расчётных данных от теоретических значений нормального распределения (см. рис. 1-3).

Как показывают расчёты (см. табл. 2) с помощью «методики сдвига» в этих узлах удалось уменьшить внесённую в нормальное распределение погрешность в среднем как минимум в два раза.

В отличие от «методики сдвига» методика, основанная на применении сглаживающих

сплайнов, в некоторых узлах наибольших отклонений экспериментальных данных от теоретических значений дала ещё большие отклонения (в табл. 2 соответствующие данные выделены жирным шрифтом, узлы – $X=3,50$, $X=4,25$, $X=5,50$ и $X=6,25$).

В дополнение к проведённым расчётам, в качестве второго примера, в таблице 3 приведены данные обработки экспериментальных данных по двум методикам спектра внутреннего трения $tg\delta = f(T)$ для ЭП УП-643 [14] в области γ -релаксации [16].

Таблица 3
ДААННЫЕ РАСЧЁТОВ ПО ДВУМ МЕТОДИКАМ ДЛЯ СПЕКТРА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ЭП УП-643
Table 3
DATA OF CALCULATIONS BY TWO METHODS FOR THE SPECTRUM OF INTERNAL FRICTION EP UP-643

T_i	$tg\delta_i$		
	Эксперимент	Расчётные данные	
		$\rho = 10$	$ko_shift = 6$
200	0,0334	0,0361	0,0393
204	0,0381	0,0394	0,0397
208	0,0428	0,0379	0,0397
211	0,0341	0,0384	0,0397
215	0,0432	0,0427	0,0423
219	0,0468	0,0459	0,0454
223	0,0456	0,0446	0,0458
226	0,0443	0,0473	0,0469
230	0,0525	0,0498	0,0498
233	0,0484	0,0494	0,0502
237	0,0471	0,0464	0,0470
240	0,0440	0,0447	0,0447
244	0,0444	0,0448	0,0446
247	0,0462	0,0464	0,0456
250	0,0464	0,0441	0,0454
253	0,0416	0,0448	0,0452
255	0,0471	0,0460	0,0460
260	0,0471	0,0450	0,0467
263	0,0422	0,0454	0,0451
267	0,0452	0,0416	0,0409
271	0,0346	0,0379	0,0383
273	0,0398	0,0400	0,0385
276	0,0417	0,0384	0,0389
279	0,0351	0,0381	0,0375

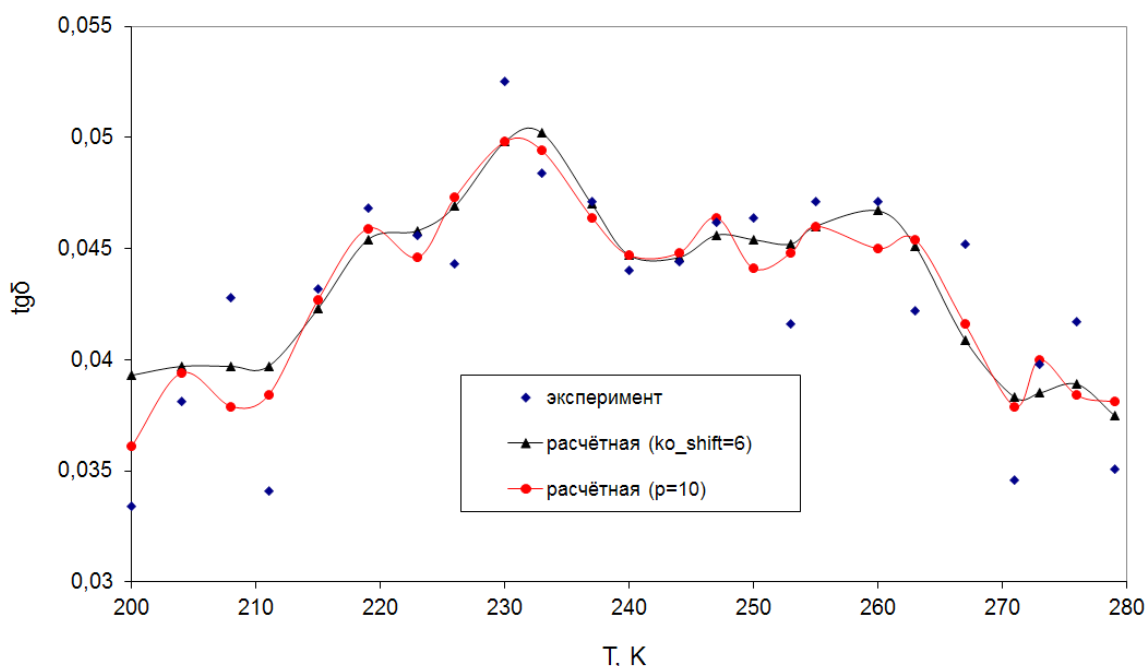


Рисунок 4 – Экспериментальные данные и расчётные (по двум методикам) кривые для ЭП УП-643

Figure 4 – Experimental data and calculated (by two methods) curves for EP UP-643

Примечание: для получения расчётных данных с помощью «методики сдвига», соответствующих температурам таблицы 3, необходимых для удобства сравнения, на последнем этапе работы программы MSPLANE [12] был задействован коэффициент получения дополнительного количества точек $ko_add = 100$; остальные расчётные данные, полученные для температурного диапазона таблицы 3, в последнем столбце не приводятся.

На рисунке 4, наряду с экспериментальными данными спектра внутреннего трения ЭП УП-643, приведены для сравнения расчётные (по двум методикам) кривые, соответствующие параметрам $ko_shift = 6$ и $\rho = 10$, соответственно.

Как видно из рисунка 4 обе методики визуально дают хороший результат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате сравнительного анализа полученных по двум методикам расчётных данных в случае нормального распределения установлено, что «методика сдвига» в проведённом тесте показала лучшие результаты, согласующиеся с нормальным распределением в пределах внесённой в тестовую кривую погрешности во всех узлах вышеуказанного диапазона $x = 3 \div 7$.

При использовании методики, основанной на применении сглаживающих сплайнов, вероятнее всего необходимо для узлов наибольших отклонений экспериментальных данных от теоретических значений подбирать разные весовые коэффициенты, чтобы эти отклонения не превышали погрешности, внесённые в тестовую кривую (см. данные табл. 2, узлы – $X=3,50$, $X=4,25$, $X=5,50$ и $X=6,25$).

Во втором примере расчёта (при обработке экспериментальных данных) для спектра внутреннего трения ЭП УП-643 [14] в области γ -релаксации [16] обе методики визуально показали хороший результат и для однозначного выявления лучшей из них в этом случае требуются дополнительные исследования, связанные с моделированием кривой, характерной для такого вида экспериментальных данных как у ЭП УП-643.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
2. Карл Де Бор. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
3. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 240 с.
4. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.

5. Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Ленинград: ЛГУ, 1986. 120 с.
6. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1990. 176 с.
7. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. М.: ИТ Пресс, 2006. 496 с.
8. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. М.: МИКАП, 1994. 382 с.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
12. Федорук В.А. Обработка экспериментальных данных на основе «методики сдвига» при интерполяции кубическими сплайнами // Вестник СибАДИ. 2016. № 2 (48). С. 132-136.
13. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1987. 248 с.
14. Федорук В.А. Вязкоупругие свойства некоторых модифицированных полимерных материалов и методы их анализа на основе расчёта параметров релаксационных процессов: дис. ... канд. техн. наук. Омск, 1996. 161 с.
15. Бартеьев О.В. Современный Фортран. М.: Диалог-МИФИ, 1998. 397 с.
16. Бартеьев Г.М., Бартеьева А.Г. Релаксационные свойства полимеров. М.: Химия, 1992. 384 с.

IMPROVING THE EFFICIENCY OF EXPERIMENTAL DATA PROCESSING AT CUBIC SPLINES' INTERPOLATION BY "THE SHIFT TECHNIQUE"

V. A. Fedoruk

ABSTRACT

Introduction. To process the experimental data, interpolation and smoothing cubic splines are widely used in practice. This task is relevant and attracts a sufficiently large number of researchers. To make contribution to the solution of this difficult problem, the author previously proposed "the shift technique". The author sets the task of comparing such methodology with the well-known and widely used method of spline-smoothing.

Methods and materials. In this article two methods of processing experimental data at interpolation by cubic splines are compared. The first technique is based on the use of smoothing cubic splines (smoothing splines) in the processing of experimental data. The second one is based on the use of "the shift technique" based on the shift points of stitching together fragments of cubic parabolas, which are relative to the interpolation nodes linked to the experimental data. To compare the effectiveness of both methods, the Gaussian distribution (normal distribution) is chosen as the test curve.

Results and discussion. The calculated data obtained by the two above-mentioned methods are presented in tabular and graphical forms for greater visibility. It follows that the obtained calculations with "the shift technique" at the nodes in which the greatest deviations of the calculated data from the theoretical values of the normal distribution, are observed in the article. Therefore, the possibility to reduce the error introduced into the normal distribution by an average of at least twice is discussed.

Conclusion. As a result of a comparative analysis of the calculated data obtained using the two methods, the author concludes that "the shift technique" in the test-performed program show better results that are in good agreement with the normal distribution within the error made to the test curve.

KEYWORDS: experimental data, interpolation, interpolation nodes, splines, cubic splines, smoothing cubic splines, shift technique.

REFERENCES

1. Alberg Dzh., Nil'son E., Uolsh Dzh. Teoriya splainov i ee pr ilozeniya. Moscow, Mir, 1972. 319 p.
2. Karl De Bor. Prakticheskoe rukovodstvo po splainam. Moscow, Radio i svyaz', 1985. 304 p.
3. Voskoboinikov Yu.E., Preobrazhenskii N.G., Sedel'nikov A.I. Matematicheskaya obrabotka eksperimenta v molekulyarnoi gazodinamike. Novosibirsk, Nauka, 1984. 240 p.
4. Zav'yalov Yu.S., Leus V.A., Skorospelov V.A. Splainy v inzhenernoi geometrii. Moscow, Mashinostroenie, 1985. 224 p.
5. Malozemov V.N., Pevnyi A.B. Polinomial'nye splainy. Leningrad, LGU, 1986. 120 p.
6. Zavarykin V.M., Zhitomirskij V.G., Lapchik M.P. Chislennye metody [Numerical methods]: Ucheb. posobie dlja studentov phiz.-mat. spets. ped. In-tov. Moscow, Prosveshchenie, 1990. 176 p.
7. Alekseev E.R., Chesnokova O.V. Reshenie zadach vychislitel'noj matematiki v paketah Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9 [Decision of problems of computational mathematics in packages Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9]. Moscow, NT Press, 2006. 496 p.
8. Nosach V.V. Reshenie zadach approksimatsii s pomoshh'ju personal'nyh komp'yuterov [Solution approximation problems by means of personal computers]. Moscow, MIKAP, 1994. 382 p.
9. Samarskij A.A., Gulin A.V. Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow, Nauka, 1989. 432 p.

