

calibrating the sensor for each coordinate, and the error due to non-orthogonality of the coordinate axes can be significant and reach a few percent (1.75%/deg). To reduce this error must be strict adherence to the orthogonality of the coordinate axes of the sensor.

Keywords: *three-coordinate sensor, constructive errors, sensitivity error, orthogonality error.*

REFERENCES

1. Gatman S. Dvojnoj izmeritel' ehlektricheskogo polya s zashchitoj /S.Gatman // Pribory dlya nauchnyh issledovanij. – 1968, №1. – S.45-49.
 2. Horvath T. Izmerenie napryazhennosti neiskazhennogo ehlektricheskogo polya v vysokovol'tnyh ustanovkah. – Measurement of the distortion less electric field intensity of high voltage installations. Third International Symposium on High voltage Engineering. Milan, 28-31 Aug.1979, p. 44.05/1-44.05/4.: Perevod VCP № G-21913 / T.Horvath, G.Clement. – M., 1981. –12 s.
 3. SHCHiglovskij K.B. Pribory dlya izmereniya parametrov ehlektrostaticheskogo polya i ih kalibrovka / K.B.SHCHiglovskij, V.S.Aksel'rod // Izmeritel'naya tekhnika. –1978. -№5. –S.63-65.
 4. Pat. 3.750.017 SSHA, MKI G01R 31/02. Pribor dlya izmereniya ehlektromagnitnogo polya = The device for measurement of an electromagnetic field / Ronald Ray Bowman, Ezra Ben Larson Donald Russell Belsher; Zayavleno 16.09.71; Opubl. 31.07.73.
 5. Vygodskij, M. YA. Spravochnik po vysshej matematike / M. YA. Vygodskij. – M. : Nauka, 1972. – 874s.
- Бирюков Сергей Владимирович (Омск, Россия) – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики ФГБОУ ВО «СиБАДИ» (644080, г. Омск, пр. Мира, 5), профессор кафедры физики ФГБОУ ВО «ОмГТУ» (644050, г. Омск, пр. Мира, 11);*
- Тюкин Александр Владимирович (Омск, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры физики ФГБОУ ВО «СиБАДИ» (644080, г. Омск, пр. Мира, 5).*
- Sergey V. Biryukov (Omsk, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, professor, professor, Department of physics of Sibirskaya State Automobile and Highway Academy ²SibADI² (644080, Omsk, Mira Ave., 5), professor of department of physics of Omsk State Technical University ²OmGTU², Omsk, Russia (644050, Omsk, Mira Ave., 11);*
- Aleksandr V. Tyukin (Omsk, Russian Federation) – Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, professor, Department of physics of Sibirskaya State Automobile and Highway Academy ²SibADI² (644080, Omsk, Mira Ave., 5).*

УДК 004.932.2

ПОСТРОЕНИЕ МЕТАМОРФИЗМОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАНКАРЕ

С. В. Лейхтер
Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СиБАДИ), Россия, г. Омск

Аннотация. В работе рассмотрена задача сравнения двух изображений – исходного и целевого, представляющих собой кривые заданные соответствующим каждой набором точек в двумерном пространстве. Задача решается путём нахождения диффеоморфизма, который позволит совместить точки деформируемого изображения с точками шаблона. В основе решения лежит метод построения функционала, характеризующего эволюцию диффеоморфизмов изображения от его начального состояния до конечного и «штраф» за отклонение траекторий движения точек изображения от требуемых. Разработан алгоритм решения уравнения диффеоморфизма, основанный на оптимизации (минимизации) построенного функционала методом градиентного спуска. Предложенный метод сравнения двух изображений может быть использован при оптимальном метаморфизме изображений, когда отсутствует поточечное соответствие между исходным и целевым изображениями. Разработанные в работе алгоритмы могут использоваться в биометрических системах, системах классификации изобра-

жений и объектов, системах машинного зрения, при распознавании образов и объектов, системах трекинга.

Ключевые слова: распознавание образов, уравнения Эйлера-Пуанкаре, диффеоморфизм, метаморфизм изображений.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрена задача сравнения двух изображений – исходного и целевого, представляющих собой кривые заданные соответствующим каждой набором точек в двумерном пространстве. Задача решается путём нахождения диффеоморфизма, который позволит совместить точки деформируемого изображения с точками шаблона. В основе решения лежит метод построения функционала, характеризующего эволюцию диффеоморфизмов изображения от его начального состояния до конечного и «штраф» за отклонение траекторий движения точек изображения от требуемых. Разработан алгоритм решения уравнения диффеоморфизма, основанный на оптимизации (минимизации) построенного функционала методом градиентного спуска. Предложенный метод сравнения двух изображений может быть использован при оптимальном метаморфизме изображений, когда отсутствует поточечное соответствие между исходным и целевым изображениями. Разработанные в работе алгоритмы могут использоваться в биометрических системах, системах классификации изображений и объектов, системах машинного зрения, при распознавании образов и объектов, системах трекинга.

Отличие предлагаемого метода от существующих методов метаморфизма изображений заключается в том, что функционал, характеризующий диффеоморфизм изображений, является оптимальным и уникальным.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАНКАРЕ

Рассмотрим многообразие M , на которое действует лиева группа диффеоморфизмов G . Метаморфизм – это пара кривых $(g_t, \eta_t) \in G \times M; g_0 = \text{id}$, параметризованных временем t . Будем использовать символы $\eta_t, n_t \in M$, где η_t ассоциируется с шаблоном, а $n_t = g_t \cdot \eta_t \in M$ – образ метаморфизма. g_t является элементом группы диффеоморфизмов в момент времени t ; η_t – шаблоном метаморфизма. Когда $\eta_t = \text{const}$ – метаморфизм называется диффеоморфизмом.

Будем считать, что лиева группа – это группа, которая является конечномерным вещественным гладким многообразием, в котором групповые операции являются гладкими отображениями. Дифференцируемое отображение $M \rightarrow N$ для многообразий M, N называется диффеоморфизмом, если оно является биекцией и его обратное отображение $N \rightarrow M$ является дифференцируемым. Лие-

ва группа диффеоморфизмов $\text{Diff}(M)$ дифференцируемого многообразия M является группой всех диффеоморфизмов M к самой себе [1].

Для сравнения двух изображений найдем оптимальную деформацию, которая переводит одно изображение в другое. Для этого сформируем минимизируемый функционал:

$$\int_0^1 L(g, \dot{g}, \eta, \dot{\eta}) dt$$
, с функцией Лагранжа $L(g, \dot{g}, \eta, \dot{\eta})$ и фиксированными граничными условиями $n_0 = \eta_0 \in M$, $n_1 = g_1 \cdot \eta_1 \in M$.

Будем считать, что L инвариантен при правом действии элемента группы $h \in G$:

$(g, \eta)h = (gh, h^{-1}\eta)$. Для метаморфизма (g, η) введем скорость изменения элемента группы $\mathcal{G}$, которая является элементом соответствующей лиевой алгебры $\mathfrak{g}$:

$u = \dot{g}g^{-1} \in \mathfrak{g}$ и $n = g\eta; v = g\dot{\eta}$, откуда $v = \dot{n} - un$ (действие лиевой алгебры обозначается конкатенацией с левой стороны). Тогда лагранжиан может быть редуцирован: $L(g, \dot{g}, \eta, \dot{\eta}) = l(u, n, v)$.

Метод сравнения образов основан на решении вариационной задачи: $\delta \int l(u, n, v) dt = 0$, для диффеоморфизмов $g \in G$.

Из условия оптимизации действия $S = \int_0^1 l(u, n, v) dt$ по отношению к вариации δu и $\omega = \delta n = \delta(g\eta)$ при фиксированных n_0, n_1 , определим уравнения Эйлера-Пуанкаре. Найдем производную по времени $\dot{\omega}$:

$\dot{\omega} = \delta v + u\omega + \delta un$. Вариационное условие оптимизации: $\delta S = 0$ приводит к уравнению:

$$\int_0^1 \left(\left\langle \frac{\delta l}{\delta u}, \delta u \right\rangle + \left\langle \frac{\delta l}{\delta n}, \omega \right\rangle + \left\langle \frac{\delta l}{\delta v}, \dot{\omega} - u\omega - (\delta u)n \right\rangle \right) dt = 0 \quad (1)$$

члены с δu приводят к уравнению:

$$\frac{\delta l}{\delta u} + \frac{\delta l}{\delta v} \diamond n = 0; \quad (2)$$

здесь оператор $\diamond$ определяется из соотношения: $\langle v \diamond a, \xi \rangle = \langle a, \xi v \rangle; \forall \xi \in \mathfrak{g}; v \in V; a \in V^*$. После интегрирования по частям, члены с $\dot{\omega}$ в уравнении вариации получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta l}{\delta v} \right) + u \dot{a} \frac{\delta l}{\delta v} - \frac{\delta l}{\delta n} = 0, \quad (3)$$

где $\dot{a}$ определяется формулой: $\langle u \dot{a} \frac{\delta l}{\delta v}, \omega \rangle = \langle \frac{\delta l}{\delta v}, u\omega \rangle$. Для построения полной системы уравнений добавим соотношение:

$$\dot{n} = v + un. \quad (4)$$

Диффеоморфизмы $g(x) \in G; x \in M$, которые могут быть представлены в форме потоков обыкновенных дифференциальных уравнений, эволюционирующих во времени $t \in [0, 1]$ с векторным полем $u(\cdot)$ [2]:

$$\frac{dg(x)}{dt} = u(g(x)); g_{t=0}(x) = x. \quad (5)$$

Запишем скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{g}$ в форме $\langle u, v \rangle_{\mathfrak{g}} = (L_{\mathfrak{g}} u, v); \|u\|_{\mathfrak{g}}^2 = \langle u, u \rangle_{\mathfrak{g}}$, где $L_{\mathfrak{g}}$ – оператор дуальности, который отображает элементы лиевой алгебры $\mathfrak{g}$ на элементы лиевой коалгебры $\mathfrak{g}^*$: $L_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$. В случае механической интерпретации величина $L_{\mathfrak{g}} u$ имеет смысл вектора импульса, u – вектора скорости, $L_{\mathfrak{g}}$ – тензора инерции. Введем обратный

оператор K , который формально представим в виде: $K = L_{\mathfrak{g}}^{-1}$.

Для элементов группы $g_t \in G; t \in [0, \dots, 1]$ существуют скорости изменения g_t : $u = \frac{dg_t}{dt} g_t^{-1} \in \mathfrak{g}$, которые минимизируют функционал: $S = \int_0^1 l(u) dt$ с лагранжианом:

$$l = \|u\|_{\mathfrak{g}}^2 + \sigma^{-2} |v|^2, \quad (6)$$

на траектории, соединяющей элементы группы $g_0 = g|_{t=0}$ и $g_1 = g|_{t=1}$; здесь второе слагаемое накладывает штраф за отклонение $|v|^2 = |\dot{n} - un|^2$, обратно пропорциональный величине σ^2 .

Выражение для импульса можно формально записать в виде $p = L_{\mathfrak{g}} u$; тогда обратное выражение: $u = L_{\mathfrak{g}}^{-1} p = Kp$ или $u(x) = \int_{\Omega} K(x, y) p(y) dy$.

Для оператора: $L = \text{id} - a\nabla^2$ в $\mathbf{R}^2$ – обратный оператор $K = L^{-1}$ аппроксимируем функцией Гаусса [3]: $K(x, y) = \beta e^{-\alpha^{-1}|x-y|^2}$.

Уравнения эволюции диффеоморфизмов Эйлера-Пуанкаре можно получить решением уравнений вариационной задачи с функционалом (6) [4]:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= u(g); \\ u &= L_{\mathfrak{g}}^{-1} p = Kp; \\ \dot{p} &= -\text{ad}_u^* p = -(Dp)u - p\nabla u - (Du)^T p, \end{aligned} \quad (7)$$

$$Df = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad (8)$$

МЕТАМОРФИЗМ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть заданы два множества $n_0 = (x_1, \dots, x_N), n_1 = (y_1, \dots, y_N)$ выбранных точек в M . Поставим задачу нахождения такого минимального диффеоморфизма:

$g: M \rightarrow M$, что $g(x_i) \neq y_i; i = 1, \dots, N$ (неточное соответствие). Множество диффеоморфизмов $\text{Diff}(M)$ определяют структуру группы.

Для точечных множеств:

$$p(y) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \delta(y - q_i), \text{ откуда получим:}$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^N K(x, q_i) p_i. \quad (9)$$

Пусть пространство M содержит N точек, описывающих объект (кривую) подлежащий деформации. Рассмотрим действие

$$S = \int_0^1 l(u, v) dt \text{ с лагранжианом}$$

$$l(u, v) = \|u\|_g^2 + 1/\sigma^2 \sum_{k=1}^N |v_k|^2 =$$

$$= \|u\|_g^2 + 1/\sigma^2 \sum_{k=1}^N |\dot{q}_k - u(q_k)|^2, \quad (10)$$

который не зависит от n . Тогда:

$$\delta l / \delta u = 2L_g u \quad \text{и} \quad \delta l / \delta v = 2/\sigma^2 (v_1, \dots, v_N).$$

Из уравнения (2): $\delta l / \delta u + \delta l / \delta v \diamond n = 0$,
имеем $\delta l / \delta v \diamond n = -2/\sigma^2 \sum_{k=1}^N v_k \cdot \delta(q - q_k)$, поэтому:

$$L_g u = \sigma^{-2} \sum_{k=1}^N v_k \cdot \delta(q - q_k), \quad (11)$$

откуда $u(q) = \sum_{k=1}^N K(q, q_k) p_k$, где $p_k = \sigma^{-2} v_k$.

Из уравнения (3):

$$\dot{p}_k + Du(q_k)^T p_k = \dot{p}_k +$$

$$+ \sum_{l=1}^N \nabla_1 K(q_k, q_l) p_k^T p_l = 0; k = 1, \dots, N, \quad (12)$$

где $\nabla_1 K$ представляет собой градиент функ-

ции $(q_k, q_l) \rightarrow K(q_k, q_l)$ по отношению к q_k . Если для оператора L_g выбрать функцию Грина в виде: $K(q_k, q_l) = e^{-\alpha^{-1}|q_k - q_l|^2}$, то:

$$\nabla_1 K(q_k, q_l) = -2\alpha^{-1}(q_k - q_l) e^{-\alpha^{-1}|q_k - q_l|^2}.$$

Из уравнения (4): $\dot{n} = v + un$ и обозначения: $n = (q_1, \dots, q_N)$, получим:

$$\dot{q}_k = v_k + u(q_k) = u(q_k) + \sigma^2 p_k; k = 1, \dots, N.$$

Перепишем систему (2, 3, 4) для точечных множеств в виде:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = u(q_k) + \sigma^2 p_k; k = 1, \dots, N, \\ u(q) = \sum_{k=1}^N K(q, q_k) p_k, \\ \dot{p}_k + \sum_{l=1}^N \nabla_1 K(q_k, q_l) p_k^T p_l = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим применение метода градиентного спуска в задаче нахождения метаморфизма $g_{0 \rightarrow 1} \cdot q_k(0) \rightarrow q_{0 \rightarrow 1}(1)$ при минимизации функционала

$$1/\sigma^2 \sum_{k=1}^N [q_k(1) - g_{0 \rightarrow 1} \cdot q_k(0)]^2 \rightarrow \min$$

выбором начальных значений вектора: $p(0) = (p_1(0), \dots, p_N(0))$.

Пример 1. Рассмотрим пример нахождения энергии деформации [1, 2] на основе интегрирования дифференциальных уравнений (13) при метаморфизме квадрата в окружность, которые задаются 16 точками, равномерно расположенными на кривой.

Пример 2. Рассмотрим пример нахождения энергии деформации [1, 2] на основе интегрирования дифференциальных уравнений (11) при метаморфизме образов греческих строчных символов $\alpha, \delta, \gamma, \rho, \sigma$, которые представлены 16 точками равномерно расположенными на кривой описывающей символ. Интегрирование уравнений проводилось при $\alpha = 10; \sigma^2 = 0$. Энергия вычислялась на основе определения действия $S = \int_0^1 l(u, v) dt$ с лагранжианом $l(u, v)$.

Таблица 1 – Пример деформации квадрата в окружность

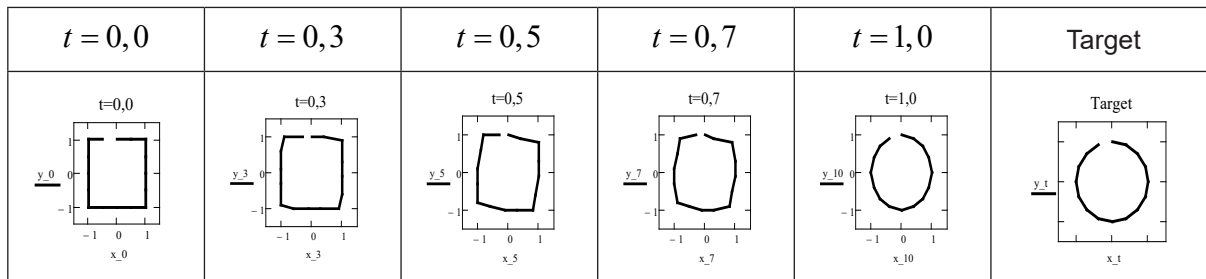


Таблица 2 – Энергии деформации при метаморфизме образов греческих строчных символов $\alpha, \delta, \gamma, \rho, \sigma$

	α	δ	γ	ρ	σ
α		31.9	28.6	37.4	26.2
δ	31.4		21.6	39.1	14.9
γ	26.3	21.9		46.7	15.2
ρ	38.2	38.9	46.8		44.3
σ	26.1	15.0	14.9	44.5	

Из таблицы следует, что наименьшую энергию деформации требуют метаморфизмы $\sigma \Leftrightarrow \delta$ и $\sigma \Leftrightarrow \gamma$; наибольшую энергию деформации требуют метаморфизмы $\rho \Leftrightarrow \sigma$ и $\rho \Leftrightarrow \gamma$; метаморфизмы образов одинаковых символов не требуют энергии деформации.

МЕТАМОРФИЗМ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим случай, когда N – пространство гладких функций (изображений) $\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ с действием $(g, n) \rightarrow n \circ g^{-1}$. Простой случай метаморфизма можно получить с помощью

действия: $S = \int_0^1 l(u, v) dt$ с лагранжианом $l(u, v) = \|u\|_g^2 + \frac{1}{\sigma^2} |v|^2$. Если $w \in \mathfrak{g}$ и n представляет собой изображение, $wn = -\nabla n^T w$, так что $(\delta l / \delta v \diamond n, w) = (\delta l / \delta v, \nabla n^T w)$. Обозначим $z = v / \sigma^2$. Тогда первое уравнение:

$$L_g u_t = -z_t \nabla n_t. \quad (14)$$

Так как $u \dot{a}(\delta l / \delta v)$ определяется из $(u \dot{a}(\delta l / \delta v), \omega) = (\delta l / \delta v, u \omega) = \frac{1}{\sigma^2} (\text{div}(vn), \omega)$ то получаем второе уравнение:

$$\dot{z}_t + \text{div}(z_t u_t) = 0. \quad (15)$$

Перепишем уравнения эволюции (2, 3, 4) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{z} + \text{div}(zu) &= 0, \\ \dot{n} + \nabla n^T u &= \sigma^2 z, \\ L_g u &= -z \nabla n \Rightarrow u(x) = \\ &= -\int_{\Omega} K(x, y) z(y) \nabla n(y) dy; x, y \in \Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача сравнения двух изображений – исходного и целевого, представляющих собой кривые заданные соответствующим каждой набором точек в двумерном пространстве. Задача решается путём нахождения диффеоморфизма, который

позволит совместить точки деформируемого изображения с точками шаблона. В основе решения лежит метод построения функционала, характеризующего эволюцию диффеоморфизмов изображения от его начального состояния до конечного и «штраф» за отклонение траекторий движения точек изображения от требуемых. При использовании вариационного исчисления задача приводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка Эйлера-Пуанкаре. Разработан алгоритм решения уравнения диффеоморфного преобразования на основе метода градиентного спуска.

Предложенный метод сравнения изображений может быть распространен на совокупность кривых, например, векторные изображения, в том числе предварительно векторизованные цветные растровые изображения, проекции трехмерных изображений и т.п.

Рассмотренная задача сравнения двух изображений может быть использована при оптимальном метаморфизме изображений, когда отсутствует точное соответствие между исходным и целевым изображениями. Разработанные в работе алгоритмы могут быть применены в биометрических системах, системах классификации изображений и объектов, системах машинного зрения, при распознавании образов и объектов. Например, для идентификации человека по изображению лица, отпечаткам пальцев, рисункам ладоней рук, ри-

сункам вен ладони или пальца, подписям и т.п.

Отличительной особенностью предлагаемого метода метаморфизма изображений является то, что функционал, характеризующий диффеоморфизм изображений, является оптимальным и уникальным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Holm D.D., Schmah T., Stoica C. Geometric mechanics and symmetry: from finite to infinite dimensions. – Oxford University Press, 2009.
2. Holm D.D., Trounev A., Younes L. The Euler-Poincaré theory of metamorphosis // Quarterly of Applied Mathematics. – 2009. – Т. 67. – №. 4. – С. 661-685.
3. Younes L., Arrate F., Miller M. I. Evolutions equations in computational anatomy // NeuroImage. – 2009. – Т. 45. – №. 1. – С. S40-S50.
4. Arnold V. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Annales de l'institut Fourier. – 1966. – Т. 16. – №. 1. – С. 319-361.
5. Chukanov S. N. Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2009. – Т. 19. – №. 2. – С. 303-305.
6. Чуканов С. Н. Формирование инвариантов при визуализации векторных полей, определяемых интегральными кривыми динамических систем // Автометрия. – 2011. – Т. 47. – №. 2. – С. 58-63.

CONSTRUCTING METAMORPHOSIS OF IMAGES FOR THE OBJECTS ON THE BASIS OF SOLVING EULER-POINCARÉ EQUATIONS

S. V. Leichter

Annotation. This work considers comparison of two images (original and target) that represent curves correspondingly shaped of set of points in two-dimensional space. The problem can be solved by finding the initial image of diffeomorphism that would allow to overlap matching points of deformable image with template's points. Solution to the problem is based on the method of constructing a minimized functionality, which characterizes evolution process of the diffeomorphic transformation of the image from initial to the final one and "penalty charge" for the deviation of the image path from the required trajectory. An algorithm for solving the diffeomorphic transformation equation is developed on the basis of the gradient descent method. The considered problem of comparing two images can be used for constructing optimal metamorphosis of images, when there is no exact correspondence between the target image and the final image of the diffeomorphism. The designed algorithms can be used through a biometrical system, in images and subjects classification systems, machine vision systems, images and patterns recognition, tracking systems.

Keywords: pattern recognition, Euler-Poincaré equation, diffeomorphism, metamorphosis approach.

REFERENCES

Leykhter Sergey Vladimirovich (Omsk, Russian) – postgraduate of the Department “Automated Systems of Information Processing and Management” State Automobile and Highway University “SibADI” (644080, Omsk, Mira, 5, email: leykhter@mail.ru).

|||||