

Научная статья
УДК 629.3.01:519.876.5
DOI: <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2026-23-4-554-566>
EDN: IZIUXX



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ВАЛИДАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИ ОБОСНОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАЧЕНИЯ КОЛЕСНОГО ДВИЖИТЕЛЯ ПО ТВЕРДОЙ ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

М.М. Жилейкин, О.А. Козелков, А.А. Косенков, В.А. Неверов ✉
Научно-технический центр «Автоматизированные технические системы»
Московский политехнический университет,
г. Москва, Россия
✉ ответственный автор
sevasxp@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Введение. Высокоточное моделирование движения внедорожных и амфибийных транспортных средств основано на точных моделях взаимодействия колес с поверхностью. Несмотря на то, что эмпирические и полуэмпирические модели качения колеса (Пасейки, Го и Лу) доминируют на твердых поверхностях, их входные параметры часто непрозрачны и не имеют прямой физической интерпретации, что существенно ограничивает их прогнозные возможности в сложных многорежимных условиях движения. Часто требуются дорогостоящие и продолжительные испытания конкретных образцов для получения корректных характеристик.

Материалы и методы. В данном исследовании представлена экспериментальная проверка физически обоснованной модели динамики колеса для недеформируемых опорных поверхностей. Математическое описание модели шины с использованием щеточной аналогии было приведено в более ранних работах. В качестве среды валидации был использован лабораторный испытательный стенд для измерения кинематики и динамики колеса в широком диапазоне вертикальных нагрузок как в ведомом режиме, так и в ведущем. Ключевые параметры, включая радиус качения, продольное проскальзывание и крутящий момент, измерялись непосредственно на стенде.

Результаты. Экспериментальные данные были применены для проверки адекватности разработанной математической модели, реализованной в MATLAB/Simulink. Модель продемонстрировала соответствие экспериментам в режиме свободного качения, с нормированной среднеквадратичной ошибкой ниже 1,2% для пройденного расстояния. В режиме движения погрешность увеличилась примерно до 10%, что, согласно анализу, объясняется возросшей сложностью приложения крутящего момента и динамикой проскальзывания.

Обсуждение и заключение. В отличие от чисто эмпирических моделей все параметры разработанной модели имеют ясный физический смысл и могут быть определены из ограниченного набора экспериментов. Это делает ее предпочтительным выбором для задач, где требуется прогнозирование поведения в различных условиях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: математическая модель, колесный движитель, экспериментальная установка, моделирование движения, колесная машина, численное моделирование, верификация модели, системы стабилизации, управление крутящим моментом

БЛАГОДАРНОСТИ: материалы статьи подготовлены в рамках научной темы FZRR-2025-0008. Отдельная благодарность выражается редакторам журнала и рецензентам.

Статья поступила в редакцию 22.04.2026; одобрена после рецензирования 11.06.2026; принята к публикации 21.08.2026.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

© Жилейкин М.М., Козелков О.А., Косенков А.А., Неверов В.А., 2026



Контент доступен под лицензией
Creative Commons Attribution 4.0 License.

Для цитирования: Жилейкин М.М., Козелков О.А., Косенков А.А., Неверов В.А. Экспериментальная валидация физически обоснованной математической модели качения колесного движителя по твердой опорной поверхности при прямолинейном движении // Вестник СибАДИ. 2026. Т. 23, № 4. С. 554-566. <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2026-23-4-554-566>

Original article

DOI: <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2026-23-4-554-566>

EDN: IZIUXI

EXPERIMENTAL VALIDATION OF A PHYSICALLY BASED MATHEMATICAL MODEL OF WHEEL ROLLING MOTION ON A SOLID SUPPORTING SURFACE DURING RECTILINEAR DRIVING

Mikhail M. Zhileykin, Oleg A. Kozelkov, Aleksey A. Kosenkov, Vsevolod A. Neverov ✉

Scientific and Technical Center "Automated Technical Systems"

Moscow Polytechnic University,

Moscow, Russia

✉ corresponding author

sevasxp@mail.ru

ABSTRACT

Introduction. High-fidelity simulation of off-road and amphibious vehicle motion relies on accurate wheel-surface interaction models. Although empirical and semi-empirical wheel rolling models (Pacejka, Guo and Lu) are dominant on solid surfaces, their input parameters are often ambiguous and do not have a direct physical interpretation, it is significantly limiting their predictive capabilities under complex, multi-mode driving conditions. Expensive and time-consuming specific sample testing is often required to obtain accurate characteristics.

Materials and Methods. This study presents an experimental validation of a physically based wheel dynamics model for non-deformable supporting surfaces. The mathematical description of the tire model with the use of brush analogy has been previously presented. A laboratory test bench was used as a validation environment to measure wheel kinematics and dynamics under a wide range of vertical loads in both driving and driven modes. Key parameters, including rolling radius, longitudinal slip, and torque have been measured directly on the rig.

Results. Experimental data were used to validate the developed mathematical model, implemented in MATLAB/Simulink. The model demonstrated match with experiment results in free-rolling mode, with a normalized root-mean-square error (RMS) below 1.2% for the covered distance. In driving mode, the error increased to approximately 10%, which, according to the analysis, is explained by the risen complexity of torque application and slip dynamics.

Discussion and Conclusion. Unlike purely empirical models, all parameters of the developed model have a clear physical meaning and can be determined from a limited set of experiments. It makes this model a preferred choice for problems requiring the behavior prediction under various conditions.

KEYWORDS: mathematical model, wheel propulsion, laboratory test bench, motion simulation, wheeled vehicle, numerical simulation, model verification, stabilization systems, torque control

ACKNOWLEDGMENTS. The materials for this article have been prepared within the framework of scientific research FZRR-2025-0008. Special thanks are expressed to the Journal editors and reviewers.

The article was submitted: April 22, 2026; approved after reviewing: June 11, 2026; accepted for publication: August 21, 2026.

All authors have read and approved the final manuscript.

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

For citation. Zhileykin M.M., Kozelkov O.A., Kosenkov A.A., Neverov V.A. Experimental validation of a physically based mathematical model of wheel rolling motion on a solid supporting surface during rectilinear driving. *The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. 2026; 23 (4): 554-566. <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2026-23-4-554-566>

© Zhileykin Mikhail M., Kozelkov Oleg A., Kosenkov Aleksey A., Neverov Vsevolod A., 2026



Content is available under the license
Creative Commons Attribution 4.0 License.

ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение колесных движителей в составе наземных транспортно-технологических комплексов обусловлено их простотой конструкции, эффективностью и надёжностью. Однако имеется большой потенциал в повышении эксплуатационных характеристик и оптимизации конструкции. Одним из ключевых аспектов является изучение процессов качения колес по различным типам поверхностей, особенно твердых, поскольку именно этот режим является основным для большинства современных автомобилей и спецтехники.

Существующие модели взаимодействия шины с основанием можно условно разделить на три группы в зависимости от их основополагающих принципов – эмпирические, полуэмпирические и физические модели [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. При этом чисто эмпирические модели встречаются довольно редко.

Широко используемая формула Пасейки [4, 5] применяет эвристические математические функции для аппроксимации экспериментальных данных, обеспечивая исключительную точность в пределах диапазона ее калибровки. Математическое выражение мгновенной боковой и продольной деформации шины при любом движении было рассчитано Го и Лу [6, 7, 8] с помощью теоретической модели шины в нестационарном состоянии. Данные полуэмпирические модели часто в своем составе не имеют прямого физического смысла, что делает экстраполяцию на непроверенные условия (например, различные поверхности, экстремальные нагрузки) ненадежной и требует обширных, дорогостоящих испытаний. Этот недостаток ограничивает ее полезность в прогнозном моделировании для новых конструкций транспортных средств или неизвестных типов местностей.

К чисто физическим моделям относятся модели шин Фиалы, Гима и Дугоффа и др. В модели Фиалы [9] боковина шины упрощена до упругой балки под действием сосредоточенной боковой силы. Модель Гима [1] основана на трехмерной пружинной модели Бергмана, в которой боковое и продольное скольжение шины описывается кинетическим уравнением бесконечно малого элемента между шиной и поверхностью дороги. Модель Дугоффа выражает коэффициент трения между шиной и дорогой как функцию коэффициента снижения трения и трения покоя. Данный вид моде-

лей, к которым относится и рассматриваемая в настоящей статье, обладает несколькими преимуществами, самое главное из которых – прямой физический смысл. Также они могут работать за пределами калибровки (ввиду сохранения физики), обладают способностью к адаптации к изменяющимся условиям. Однако приведенным моделям присущи некоторые недостатки. Так, в модели Фиалы учитываются только упругие силы, а диссипативные не рассматриваются. Модель Гима требует знания большого числа параметров шины, измерить которые даже экспериментальным способом затруднительно. Модель Дугоффа плохо описывает области работы шины с большим коэффициентом буксования, где проявляются нелинейные эффекты взаимодействия. Ещё одним недостатком является отсутствие доступа к экспериментальным данным, что затрудняет возможности адаптации модели под реальные конструкции.

Возможности современной вычислительной техники позволяют существенно углубить подходы к моделированию взаимодействия колеса с опорным основанием. Перечисленные выше модели часто имеют существенные ограничения либо по области режимов работы колеса, либо по возможности масштабируемости исходных данных по разным типам шин. В то же время моделирование движения эластичного колеса является сложной задачей, и даже небольшое улучшение моделей, повышение их точности позволяет значительно расширить их применимость и универсальность. Поэтому в настоящее время рассматриваемое направление представляется актуальным.

Существует класс математических моделей, которые не требуют экспериментальных исследований в целях калибровки. Например, «чистые» кинематические модели [12], модель «невесомой шины» [13] или модель «сухого трения» [14]. В большинстве случаев применимость моделей ограничена узким классом задач. Валидируемая в настоящей работе модель занимает промежуточное положение: она требует калибровки, но объем необходимых экспериментов минимален.

На самом детальном уровне модели конечно-элементной (КЭ) конструкции шины могут описывать взаимодействие с высокой точностью [15, 16, 17, 18, 19]. Такие подходы, включая сопряженную вычислительную гидродинамику и динамику многозвенных систем (CFD-MBD) для амфибийных приложений [20], являются мощными, но вычислительно сложными и требовательными для моделирования

транспортных средств на системном уровне или приложений реального времени. Они служат инструментами проверки, а не практическими компонентами в комплексных моделях транспортных средств.

Данное исследование направлено на преодоление этого пробела путем предоставления экспериментальной проверки физически обоснованной модели динамики колеса. Основной целью, с одной стороны, является разработка комплексной методологии испытаний и предоставление набора данных для описания кинематики и динамики колесного движителя. С другой стороны, с помощью полученных данных осуществить экспериментальную валидацию разработанной модели динамики.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Математическая модель

Более подробно математическая модель описана и верифицирована в работе [21]. Отметим некоторые положения модели. На нижней полуокружности недеформированного профиля колеса выбирается некоторое количество точек n_i , положение которых определяется углом α_i между вертикалью, опущенной из центра колеса на ось X_2 , и лучом, соединяющим точку профиля с центром колеса (расчётная схема на рисунке 1, а). Количество точек выбирается исходя из компромисса между точностью модели и ее быстродействием. Координаты X_{2i} и Y_{2i} выбранных точек профиля в НСК:

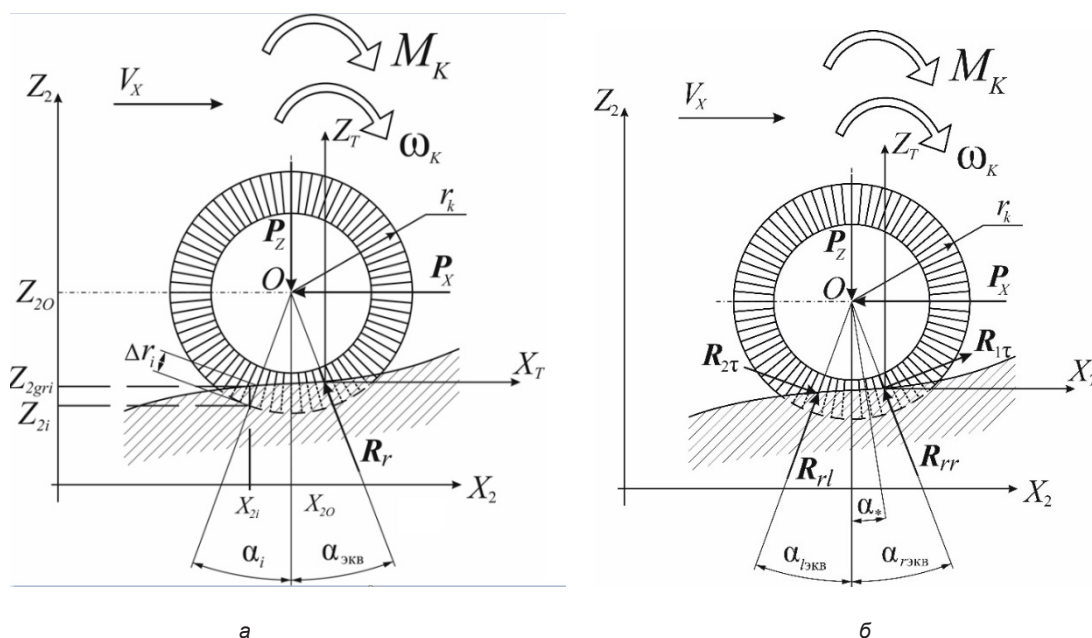


Рисунок 1 – Расчетная схема качения колеса по неровностям опорного основания (а) и силовые факторы (б):

O – центр колеса; Z_{2O} , X_{2O} – координаты центра колеса в НСК;
 ω_k – угловая скорость вращения колеса; M_k – крутящий момент, приложенный к колесу;
 V_x – продольная скорость центра колеса;
 P_Z , P_X – вертикальная и продольная силы, приложенные к центру колеса со стороны оси КМ;
 R_r – радиальная проекция реакции взаимодействия колеса с опорным основанием; r_k – свободный радиус колеса;
 Z_{2gri} , X_{2i} – координаты точки опорного основания под i -й точкой недеформированного профиля колеса;
 α_i – угол между вертикальной осью и i -й точкой недеформированного профиля колеса;
 $\alpha_{\text{экв}}$ – эквивалентный угол точки приложения суммарной реакции;
 Δr_i – прогиб шины в радиальном направлении для i -й точки недеформированного профиля колеса
 Источник: [22].

Figure 1 – Calculation scheme of wheel rolling on unevenness of supporting base (a) and force factors (b)

O – the wheel center; Z_{2O} , X_{2O} – the wheel center coordinates in the fixed coordinate system;
 ω_k – the angular velocity of the wheel rolling; M_k – the torque applied to the wheel;
 V_x – the longitudinal velocity of the wheel center;
 P_Z , P_X – the vertical and longitudinal forces applied to the wheel center from the side of KM axis;
 R_r – the radial projection of the reaction of the wheel interaction with the supporting base; r_k – the free radius of the wheel;
 Z_{2gri} , X_{2i} – the coordinates of the point of the supporting base under the i -point of the undeformed wheel profile;
 α_i – the angle between the vertical axis and the i -point of the undeformed wheel profile;
 α_{equiv} – the equivalent angle of the application point of the summary reaction;
 Δr_i – the tire deflection in the radial direction for the i -point of the undeformed wheel profile.
 Source: [22].

$$X_{2i} = X_{20} + r_k \sin \alpha_i \cos(\Theta + \beta); \quad (1)$$

$$Y_{2i} = Y_{20} + r_k \sin \alpha_i \sin(\Theta + \beta); \quad (2)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2},$$

где X_{20} , Y_{20} – координаты центра колеса в НСК; Θ – угол между осями OX_2 и OX ; β – угол поворота управляемого колеса.

Вертикальная координата Z_{2i} i -й точки недеформированного профиля колеса в НСК:

$$Z_{2i} = Z_{20} - r_k \cos \alpha_i, \quad (3)$$

где Z_{20} – вертикальная координата центра колеса в НСК.

Прогиб шины в радиальном направлении для i -й точки недеформированного профиля:

$$dr_i = \begin{cases} 0, & Z_{2gri} \leq Z_{2i} \\ (Z_{2gri} - Z_{2i}) \cos|\alpha_i|, & Z_{2gri} > Z_{2i} \end{cases} \quad (4)$$

где Z_{2gri} – вертикальная координата профиля опорного основания под i -й точкой колеса. Предполагается линейная зависимость силы от деформации, более подробно описанная в [21].

При наличии нескольких зон «перекрытия» профилем опорного основания недеформированного контура колеса необходимо определить эквивалентный угол $\alpha_{\text{экв}}$ точки приложения суммарной реакции R_r в радиальном направлении. Определяется угол $\alpha_{\text{экв}}$ как взвешенное среднее значение. При качении колеса после вступления в контакт с опорным основанием в точке с угловой координатой α_i конец щетинки некоторое время может быть неподвижен относительно опорной поверхности. На колесо со стороны щетинки действует упругая элементарная сила f_{ui} , пропорциональная вектору деформации щетинки в плоскости, ей перпендикулярной.

После определения границы области скольжения необходимо определить силовые факторы для каждой из зон (рисунок 1, б).

- Эквивалентные углы $\alpha_{\text{экв}}$ и $\alpha_{\text{гэкв}}$ точек приложения суммарных реакций R_{rl} и R_{rr} в радиальном направлении для обеих зон.

- Суммарные реакции R_{rl} и R_{rr} в радиальном направлении для обеих зон:

$$R_{rl} = R_r \frac{\sum_{i=1}^{n_*} \Delta r_i}{\sum_{i=1}^{n_k} \Delta r_i}; \quad (5)$$

$$R_{rr} = R_r \frac{\sum_{i=n_*+1}^{n_k} \Delta r_i}{\sum_{i=1}^{n_k} \Delta r_i}, \quad (6)$$

где n_* – число щетинок в области зоны взаимодействия без скольжения.

- Суммарные реакции R_{1r} и R_{2r} в тангенциальном направлении для обеих зон.

- Суммарные реакции R_{1Y_T} и R_{2Y_T} в направлении оси Y_T МПСК для обеих зон.

На основе разработанной модели выполнена её реализация в программном комплексе Matlab/Simulink.

Испытательный стенд

Для проведения эксперимента была использована специальная испытательная установка, включающая подвижную платформу, оснащенную датчиками нагрузки. На рисунке 2 показана её схема с описанием составных частей. На рисунке 3 приведен общий вид.

Исследуемый колесный движитель устанавливают на тележке с помощью параллелограммной подвески на продольных рычагах. Рама тележки выполняет функции неподвижного звена подвески, роль подвижного вертикального звена которой выполняют два продольных рычага, шарнирно закрепленные одними концами на раме тележки, а другими прикрепленные к ступице колеса. Подвеска обеспечивает независимость (относительно тележки) вертикальных перемещений колесного движителя, что позволяет сохранять постоянной установленную вертикальную (радиальную) нагрузку.

Для измерений прогиба шины между платформой и тележкой установлен датчик линейных перемещений (линейный потенциометр). Ось колеса свободно вращается в ступице, к ней может подводиться крутящий момент через съемную цепную передачу от электродвигателя с планетарным редуктором. На обоих концах стенда расположены вертикальные стойки с оборудованием для создания продольной силы, прикладываемой к оси колеса через динамометрическую тележку. На стойке установлен электромеханизм с цилиндрическим барабаном, на который наматывается гибкий тросик, проходящий через направляющие ролики и крепящийся через S-образный датчик силы к передней части тележки.

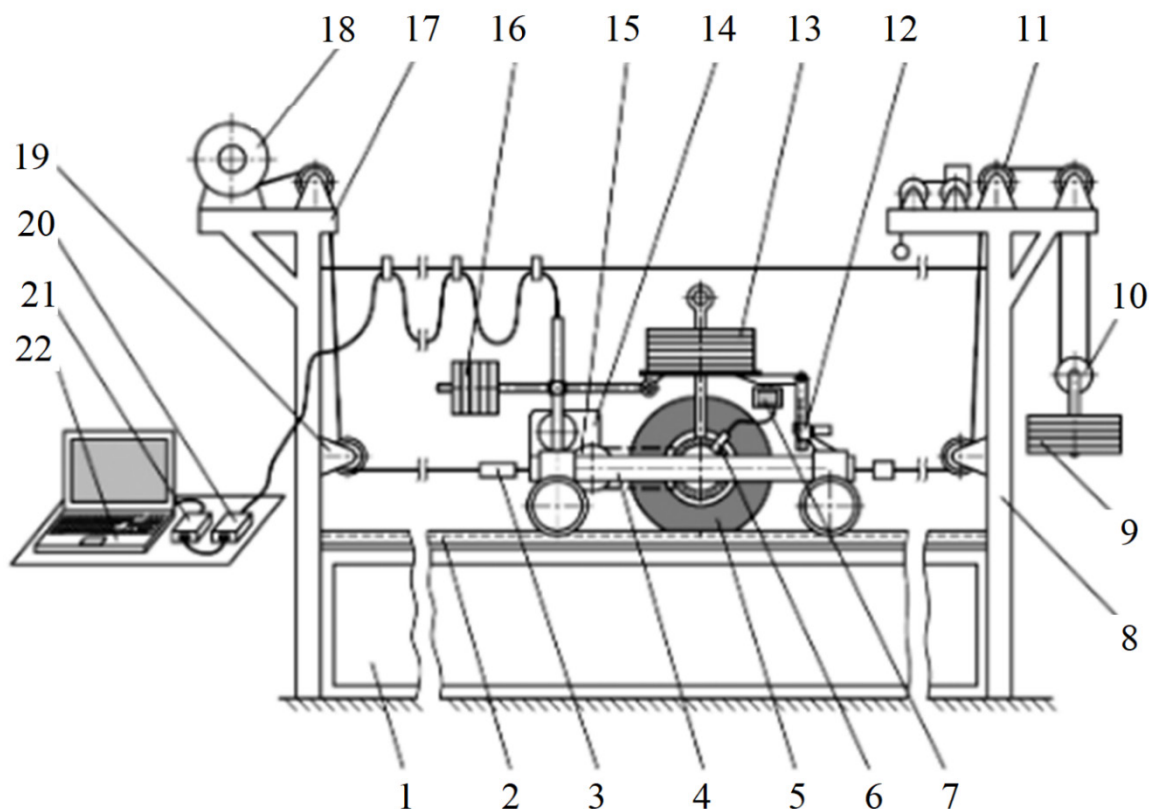


Рисунок 2 – Схема испытательного стенда:

1 – основание; 2 – опорная плита; 3 – s-образный датчик силы; 4 – динамометрическая тележка; 5 – колесный движитель; 6 – отметчик оборотов; 7 – счетчик импульсов; 8, 17 – стойки; 9, 13 – набор грузов; 10 – полиспаст; 11 – направляющий ролик; 12 – датчик линейных перемещений; 14 – планетарный редуктор; 15 – съемная цепная передача; 16 – противовес; 18 – электрический механизм; 19 – направляющие ролики; 20 – усилитель; 21 – АЦП; 22 – компьютер
Источник: составлено авторами.

Figure 2 – Test bench diagram

1 – base; 2 – supporting plate; 3 – S-shaped force sensor; 4 – dynamometer trolley; 5 – wheel; 6 – revolution indicator; 7 – impulse counter; 8, 17 – stands; 9, 13 – set of weights; 10 – lifting mechanism; 11 – guide roller; 12 – linear displacement sensor; 14 – planetary gear; 15 – removable chain drive; 16 – counterweight; 18 – electrical mechanism; 19 – guide rollers; 20 – amplifier; 21 – Analog to Digital Converter (ADC); 22 – computer
Source: compiled by the authors.

Движение колесного движителя осуществляется на базовом мерном участке, за один оборот колесного движителя отметчиков оборотов должен выдавать базовое число импульсов. Число реальных импульсов фиксируется счетчиком 7. Стенд оборудован комплексом управления и регистрации параметров качения колесного движителя. Показания тензодатчиков регистрируются с помощью усилителя и аналого-цифрового преобразователя.

Движение колесного движителя осуществляется на базовом мерном участке длиной 2000 мм, что ограничивает максимальную скорость, которая составляет 0,03 м/с. В качестве колесного движителя выступает колесо, оснащенное шиной модели В-25 Воронежского шинного завода размерностью 3,5–5.



Рисунок 3 – Общий вид стенда
Источник: составлено авторами.

Figure 3 – General view of the Test bench
Source: compiled by the authors.

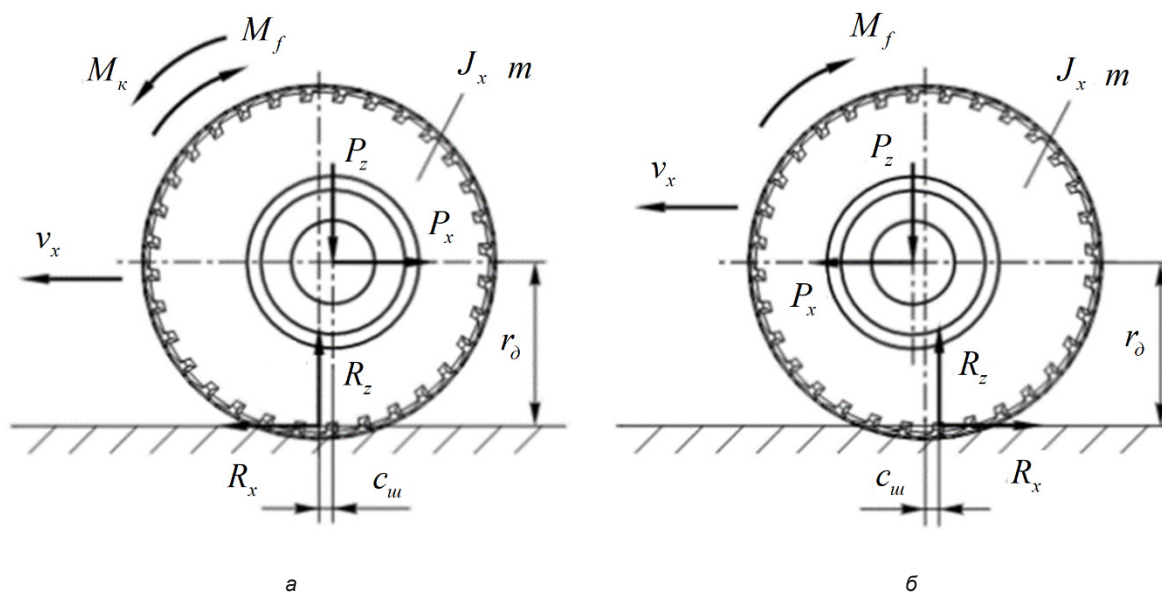


Рисунок 4 – Схемы нагружения: а – ведущий режим; б – ведомый режим.
 M_k – крутящий момент, приложенный к колесу; M_f – момент сил сопротивления;
 J_x – момент инерции колеса; m – масса колеса; V_x – продольная скорость центра колеса;
 P_z, P_x – вертикальная и продольная силы, приложенные к центру колеса со стороны оси КМ;
 R_z – вертикальная реакция взаимодействия колеса с опорным основанием;
 R_x – продольная реакция взаимодействия колеса с опорным основанием;
 r_d – радиус деформированного колеса;
 c_w – смещение оси колеса относительно начального положения
Источник: составлено авторами.

Figure 4 – Loading diagrams: a) driving mode; b) driven mode
 M_k – torque applied to the wheel; M_f – moment of resistance forces; J_x – moment of wheel inertia; m – wheel mass;
 V_x – longitudinal velocity of the wheel center;
 P_z, P_x – vertical and longitudinal forces applied to the wheel center from the side of the axis KM;
 R_z – vertical reaction of the interaction of the wheel with the supporting base;
 R_x – longitudinal reaction of the interaction of the wheel with the supporting base;
 r_d – radius of the deformed wheel;
 c_w – displacement of the wheel axis relative to the initial position
Source: compiled by the authors.

Уравнения движения

На рисунке 4 приведены исследуемые режимы нагружения колеса. Для ведущего режима (рисунок 4, а) уравнение движения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = R_x - P_x \\ J_x \dot{\omega}_k = M_k - R_x r_d - M_f - R_z c_{ш} \end{cases} \quad (7)$$

где v_x – скорость колеса; R_x – продольная реакция грунта; P_x – продольная сила, приложенная к центру колеса со стороны оси колесной машины; J_x – момент инерции колеса; ω_k – угловая скорость колеса; M_k – крутящий момент, приложенный к колесу; r_d – динамический радиус колеса; M_f – момент от сил сопротивления; R_z – вертикальная реакция грунта; $c_{ш}$ – смещение оси колеса относительно начального положения.

Для ведомого режима ($P_x < 0, M_k = 0$):

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = P_x - R_x \\ J_x \dot{\omega}_k = R_x r_d - M_f + R_z c_{ш} \end{cases} \quad (8)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Валидация математической модели

Для количественной оценки адекватности разработанной математической модели было проведено сравнение её выходных переменных – угловой скорости колеса и пройденного пути $L(t)$ – с экспериментальными временными рядами. В качестве измерения ошибки использовалась нормированная среднеквадратическая погрешность (НСКП, %), вычисленная по формуле [23]:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i} \right)^2} \cdot 100\%, \quad (9)$$

где n – число точек реализации; x_i – i -я ордината процесса, полученного экспериментально; $\hat{x}_i$ – i -я ордината процесса, полученного моделированием.

Ведомый режим

Модель продемонстрировала высокую точность в предсказании кинематики. Как видно на примере для нагрузки 343,6 Н (рисунок 5 – угловая скорость, рисунок 6 – путь), смоделированные кривые практически идентичны экспериментальным.

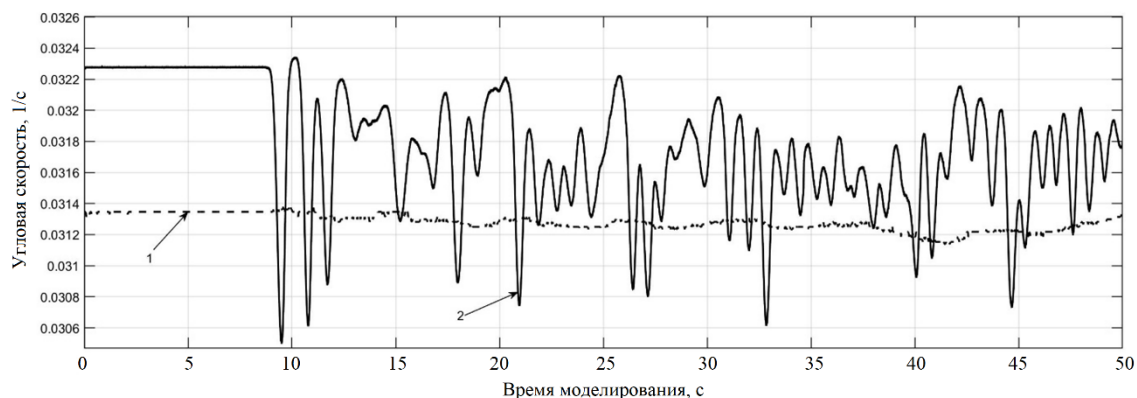


Рисунок 5 – Сравнение временных реализаций угловой скорости вращения колеса:
1 – зависимость, полученная экспериментально; 2 – зависимость, полученная моделированием
Источник: составлено авторами.

Figure 5 – Comparison of time realizations of the angular velocity of wheel rotation:
1 – dependence obtained experimentally; 2 – dependence obtained by simulation
Source: compiled by the authors.

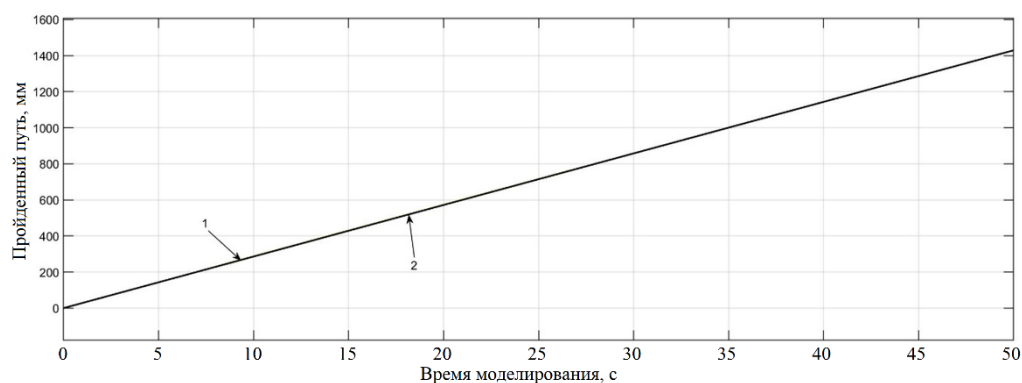


Рисунок 6 – Сравнение временных реализаций пройденного пути:
1 – зависимость, полученная экспериментально; 2 – зависимость, полученная моделированием
Источник: составлено авторами.

Figure 6 – Comparison of time realizations of the traveled path:
1 – dependence obtained experimentally; 2 – dependence obtained by simulation
Source: compiled by the authors.

Таблица 1
Точность модели в ведомом режиме
Источник: составлено авторами.

Table 1
Model accuracy in driven mode
Source: compiled by the authors.

Вертикальная нагрузка, P_z [Н]	Нормированная СКП для ω_k , $S\omega_k$ [%]	Нормированная СКП для L , S_L [%]
19,6	2,5	0,83
166,3	2,0	0,53
343,6	1,96	0,92
475,9	1,55	1,13

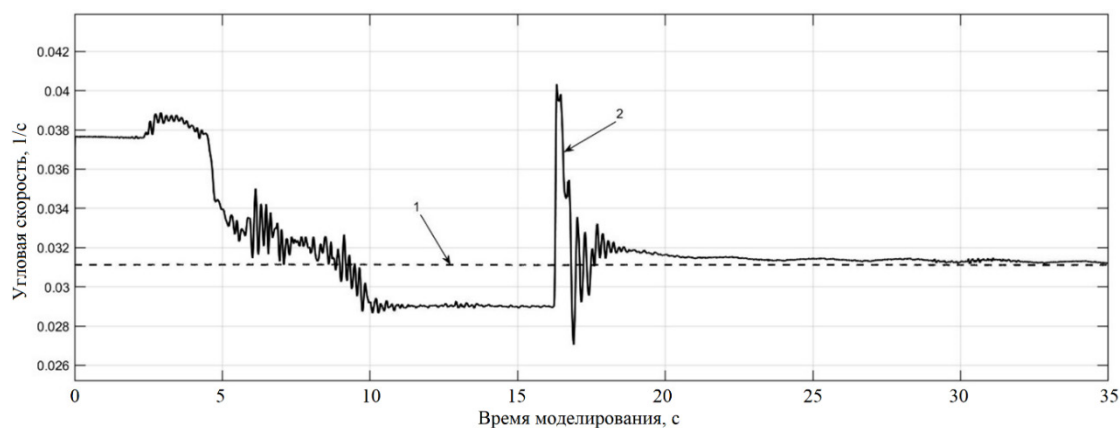


Рисунок 7 – Сравнение временных реализаций угловой скорости вращения колеса:
1 – зависимость, полученная экспериментально; 2 – зависимость, полученная моделированием
Источник: составлено авторами.

Figure 7 – Comparison of time realizations of the angular velocity of wheel rotation:
1 – dependence obtained experimentally; 2 – dependence obtained by simulation
Source: compiled by the authors.

Таблица 2
Точность модели в ведущем режиме
Источник: составлено авторами.

Table 2
Model accuracy in driving mode
Source: compiled by the authors.

Вертикальная нагрузка, P_z [Н]	Нормированная СКП для ω_k , $S\omega_k$ [%]	Нормированная СКП для L , S_L [%]
335,5	12,7	9,7
505,4	9,4	9,1

НСКП для пройденного пути во всех случаях не превышает 1,13%, что свидетельствует о корректности моделирования инерционных свойств и трения качения. Значения для различных нагрузок приведены в таблице 1. Несколько большие, но также малые значения (до 2,5%) могут быть связаны с чувствительностью модели к шумам в измерении момента сопротивления.

Ведущий режим

В ведущем режиме, где в модели учитываются нелинейные эффекты сцепления и буксования, точность предсказания ожидаемого снизилась. Результаты для двух уровней вертикальной силы представлены в таблице 2 и проиллюстрированы на рисунках 7, 8. НСКП для пройденного пути составляет 9,1–9,7%. Анализ временных реализаций показывает, что модель корректно воспроизводит общий тренд снижения угловой скорости при приложении момента, но допускает ошибки в фазе начального разгона и в установившемся режиме.

Это указывает на возможные источники погрешности: упрощения в описании динамики упругого элемента привода, неидеальность использованной аппроксимации кривой () или неучтённую зависимость параметров от скорости. Несмотря на это, относительная ошибка в ~10% может считаться удовлетворительной для многих прикладных задач системного моделирования, где данная модель используется как часть более сложного математического аппарата.

Диапазон значений нормированной среднеквадратической погрешности показывает, что разработанная математическая модель имеет высокую точность в ведомом режиме (менее 1,2%). Меньшей точностью модель обладает в ведущем режиме (9,7%).

ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные характеристики соответствуют классическим моделям (например, [24, 25, 26]). При этом низкая ошибка моделирования

в ведомом режиме ($S_L < 1,2\%$) подтверждает, что для описания кинематики свободного качения достаточно учета инерции, постоянного радиуса качения и нагрузки. Это делает модель верифицированным модулем для моделирования движения по инерции, торможения или движения под уклон.

Рост нормированной СКП до 9,7% в ведущем режиме закономерен и обусловлен несколькими факторами. В первую очередь это нелинейность и гистерезис контакта: модель не учитывает динамические эффекты перераспределения давления в контакте и гистерезисные потери. Также модель предполагает мгновенную передачу крутящего момента от источника к ободу колеса. В реальной установке присутствуют упругость и демпфирование в трансмиссии, что может вносить фазовые запаздывания.

Таким образом, ошибка в 9,7% является не недостатком модели, а количественной мерой вклада тех физических явлений, которые были сознательно исключены из рассмотрения в рамках данной постановки задачи. Для большинства расчётных исследований данная точность является приемлемой.

Конструкция применяемого стенда, а также модель, могут использоваться в качестве образовательного инструмента, позволяющего продемонстрировать связь между параметрами шины, режимом движения и результирующими силами.

Несмотря на комплекс проведенных экспериментальных исследований, модель обладает некоторыми ограничениями. В первую очередь это касается валидации на твёрдой опорной поверхности. Несмотря на то, что подавляющее большинство расчётных исследований предполагает движение по недеформируемым дорогам (асфальт, бетон), в дальнейшем предполагается оценка работы модели на деформируемом грунте. Также планируется оценка бокового и комбинированного скольжений, учитывая возможности экспери-

ментального стенда. Стоит отметить, что максимальная поступательная скорость движения колеса ограничена возможностями стенда и составляет 0,03 м/с.

По итогам выполненного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Произведена оценка модели в ведущем и ведомом режимах. В ведомом режиме нормированная среднеквадратическая погрешность моделирования пройденного пути для исследованных нагрузок не превысила 1,13%.

2. В ведущем режиме, характеризующемся нелинейными эффектами буксования, точность модели составила около 10% (по пройденному пути). Данный результат рассматривается как приемлемый для задач системного уровня. При этом он количественно отражает вклад упрощений, заложенных в модель, и очерчивает границы ее применимости.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Yang S., Lu Y., Li S. An overview on vehicle dynamics // *International Journal of Dynamics and Control*. 2013. Т. 1. №. 4:385-395. <https://doi.org/10.1007/s40435-013-0032-y> EDN: ABOTXP
2. Zhang, T., Sun, Y., Wang, Y., Li, B., Tian, Y., & Wang, F. Y. A survey of vehicle dynamics modeling methods for autonomous racing: Theoretical models, physical/virtual platforms, and perspectives // *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*. 2024. Т. 9. №. 3: 4312-4334. <https://doi.org/10.1109/tiv.2024.3351131> EDN: LBMDKQ
3. Rahnejat, H., Johns-Rahnejat, P. M., Dolatabadi, N., & Rahmani, R. Multi-body dynamics in vehicle engineering // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*. 2024. Т. 238. №. 1:3-25. <https://doi.org/10.1177/1464419323118166>
4. Pacejka H. B. (ed.). Tyre models for vehicle dynamics analysis. CRC Press, 2026.
5. Zhang, J., Liu, C., Zhao, J., & Liu, H. Research on stability control of distributed drive vehicle with four-wheel steering // *World Electric Vehicle Journal*. 2024. Т. 15. №. 6. С. 228. <https://doi.org/10.3390/wevj15060228> EDN: IUXMQK
6. Guo K. H., Lu D. The theoretical and experiment study on tire cornering properties under dynamic vertical load // *Automot Eng*. 2005. Т. 27. №. 1. С. 89-92.
7. Guo KH Vehicle handling dynamics theory. Jiangsu Science and Technology Press, 2011 Nanjing.
8. Xiong GL, Guo B, Chen XB. Co-simulation and virtual prototyping technology. Tsinghua University Press, 2004; Beijing.
9. Blundell M., Harty D. The multibody systems approach to vehicle dynamics. Elsevier, 2004.
10. Luigi Romano, Ole Morten Aamo, Jan Aslund & Erik Frisk Stability analysis of linear single-track models with transient tyre dynamics, *Vehicle System Dynamics*, 2026; 64:3, 611-645, <https://doi.org/10.1080/00423114.2024.2445163>
11. H Guo, Z Yin, D Cao, H Chen, C Lv. "A Review of Estimation for Vehicle Tire-Road Interactions Toward Automated Driving", in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. Jan. 2019; 49(1): 14-30.
12. Kobayashi T. Development of inverse magic formula for tire performance requirement analysis // *Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan*. 2022. Т. 53. №. 5. С. 936-941.
13. Решмин С.А. Качественный анализ силы тяги при вращении ведущего колеса с невесомой шиной. Оптимальное управление и дифференциальные игры, Сборник статей, Труды МИАН, 315, МИАН, М., 2021, 211–221; *Proc. Steklov Inst. Math.*, 315 (2021), 198–208. <https://doi.org/10.4213/tm4222>.
14. Киреев А.А., Жаворонок С.И., Нуштаев Д.В. О моделях шины, учитывающих как деформированное состояние, так и эффекты сухого трения в области контакта // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2021. Т. 13, № 1. С. 163–173. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-1-163-173>. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/3034/> (дата обращения: 24.06.2026).
15. Fathi H., El-Sayegh Z., Ren J., El-Gindy M. Modeling and validation of a passenger car tire using finite element analysis // *Vehicles*. 2024. Т. 6. №. 1. С. 384-402. <https://doi.org/10.3390/vehicles6010016> EDN: RTTLIG
16. Behroozi M., Olatunbosun O.A., Ding W. Finite element analysis of aircraft tyre-Effect of model complexity on tyre performance characteristics // *Materials & Design*. 2012. Т. 35. С. 810-819.
17. Fathi H. et al. An advancement in truck-tire-road interaction using the finite element analysis // *Mathematics*. - 2023. Т. 11. - №. 11. С. 2462. DOI: 10.3390/math11112462 EDN: YFFSEU
18. Jagadeesh A., Premarathna W.A. A.S., Kumar A., Kasbergen, C., Erkens S.M.J. G. Finite element modelling of jointed plain concrete pavements under rolling forklift tire // *Engineering Structures*. 2025. Т. 328. С. 119705. <https://doi.org/10.1016/j.eng-struct.2025.119705> EDN: XWLRMI
19. Ge Y., Yan Y., Yan X., Meng Z. Extending the tire dynamic model range of operating conditions based on finite element method // *Advances in Mechanical Engineering*. 2022. Т. 14. №. 3. С. 16878132221085454.
20. Yamashita H., Arnold A., Carrica P. M., Noack R. W., Martin J. E., Sugiyama H., Harwood C. Coupled multibody dynamics and computational fluid dynamics approach for amphibious vehicles in the surf zone // *Ocean engineering*. 2022. Т. 257. С. 111607. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111607> EDN: OUBLAN
21. Жилейкин М.М., Падалкин Б.В. Математическая модель качения эластичного колеса по неровностям недеформируемого основания // *Известия ВУЗОВ. Машиностроение*. 2016. № 3. С. 24–29. EDN: VOJFZZ
22. Жилейкин М.М., Козелков О.А., Неворов В.А. Математическая модель качения по неровностям опорного основания эластичного колеса на базе дискретного набора контактных эле-

ментов // Грузовик. 2025. № 6. С. 8–16. <https://doi.org/10.36652/1684-1298-2025-6-8-16>. EDN BAVNVA.

23. Neil D. Bennett, Barry F.W. Croke, Giorgio Guariso, Joseph H.A. Guillaume, Serena H. Hamilton, Anthony J. Jakeman, Stefano Marsili-Libelli, Lachlan T.H. Newham, John P. Norton, Charles Perrin, Suzanne A. Pierce, Barbara Robson, Ralf Seppelt, Alexey A. Voinov, Brian D. Fath, Vazken Andreassian. Characterising performance of environmental models // *Environmental modelling & software*. 2013. T. 40. C. 1-20. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2012.09.011>

24. Liu Z., Liu Y., Gao Q. In-plane flexible ring modeling and a nonlinear stiffness solution for heavy-load radial tires // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2022. T. 171. C. 108956. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.108956> EDN: MBMMDO

25. Xia D., Liu Q., Lu D. Friction prediction and application to lateral or longitudinal slip force prediction // *Machines*. 2022. T. 10. №. 9.C. 791. <https://doi.org/10.3390/machines10090791> EDN: PENJSI

26. Junior A.D.S., Birkner C., Jazar R. N., Marzbani H. Coupled lateral and longitudinal controller for over-actuated vehicle in evasive maneuvering with sliding mode control strategy // *IEEE Access*. 2023. T. 11. C. 33792-33811. <https://doi.org/10.1109/access.2023.3264277> EDN: GNPOKM

REFERENCES

1. Yang S., Lu Y., Li S. An overview on vehicle dynamics // *International Journal of Dynamics and Control*. 2013. T. 1. №. 4:385-395. <https://doi.org/10.1007/s40435-013-0032-y> EDN: ABOTXP

2. Zhang, T., Sun, Y., Wang, Y., Li, B., Tian, Y., & Wang, F. Y. A survey of vehicle dynamics modeling methods for autonomous racing: Theoretical models, physical/virtual platforms, and perspectives. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2024; 9(3), 4312-4334. <https://doi.org/10.1109/tiv.2024.3351131> EDN: LBMDKQ

3. Rahnejat, H., Johns-Rahnejat, P. M., Dolatabadi, N., & Rahmani, R. Multi-body dynamics in vehicle engineering. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: *Journal of Multi-body Dynamics*, 2024; 238(1), 3-25. <https://doi.org/10.1177/1464419323118166>

4. Pacejka, H. B. (Ed.). (2026). Tyre models for vehicle dynamics analysis. CRC Press.

5. Zhang, J., Liu, C., Zhao, J., Liu, H. Research on stability control of distributed drive vehicle with four-wheel steering. *World Electric Vehicle Journal*, 2024; 15(6), 228. <https://doi.org/10.3390/wevj15060228> EDN: IUXMQK

6. Guo K.H., Lu D. The theoretical and experiment study on tire cornering properties under dynamic vertical load. *Automot Eng*, 2005; 27(1), 89-92.

7. Guo, K. H. Vehicle handling dynamics theory. Jiangsu Science and Technology Press, 2011; Nanjing.

8. Xiong G.L., Guo, B., Chen, X. B. Co-simulation and virtual prototyping technology. 2004; Beijing.

9. Blundell M., Harty D. The multibody systems approach to vehicle dynamics. 2014; Butterworth-Heinemann.

10. Romano L., Aamo O.M., Aslund J., Frisk E. Stability analysis of linear single-track models with transient tyre dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 2026; 64(3), 611-645. <https://doi.org/10.1080/00423114.2024.2445163>

11. Guo H., Yin Z., Cao D., Chen H., Lv C. A review of estimation for vehicle tire-road interactions toward automated driving. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018; 49(1), 14-30. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2018.2819500>

12. Kobayashi T. Development of inverse magic formula for tire performance requirement analysis. *Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan*, 2022; 53(5), 936-941.

13. Reshmin S.A. Qualitative Analysis of the Traction Force of a Rotating Drive Wheel with a Weightless Tire. *Proc. Steklov Inst. Math.* 315, 198–208 (2021). (in Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0081543821050151>

14. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I., Nushtayev D.V. On tire models accounting for both deformed state and coupled dry friction in a contact spot // *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 1, pp. 163-173. (in Russ.) <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-1-163-173>. URL: <http://crm.ics.org.ru/journal/article/3034/> (date accessed: 24.06.2026)

15. Fathi H., El-Sayegh Z., Ren J., El-Gindy M. Modeling and validation of a passenger car tire using finite element analysis. *Vehicles*, 2024. 6(1), 384-402. <https://doi.org/10.3390/vehicles6010016> EDN: RTTLIG

16. Behroozi M., Olatunbosun, O.A., Ding, W. Finite element analysis of aircraft tyre—Effect of model complexity on tyre performance characteristics. *Materials & Design*, 2012; 35, 810-819.

17. Fathi H., Khosravi M., El-Sayegh Z., El-Gindy, M. An advancement in truck-tire—road interaction using the finite element analysis. *Mathematics*, 2023; 11(11), 2462. <https://doi.org/10.3390/math11112462> EDN: YFFSEU

18. Jagadeesh A., Premarathna W.A.A.S., Kumar A., Kasbergen C., Erkens S.M.J.G. Finite element modelling of jointed plain concrete pavements under rolling forklift tire. *Engineering Structures*, 2025; 328, 119705. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.119705> EDN: XWLRLI

19. Ge Y., Yan Y., Yan X., Meng Z. Extending the tire dynamic model range of operating conditions based on finite element method. *Advances in Mechanical Engineering*, 2022; 14(3), 16878132221085454.

20. Yamashita H., Arnold A., Carrica P.M., Noack R.W., Martin J.E., Sugiyama H., Harwood C. Coupled multibody dynamics and computational fluid dynamics approach for amphibious vehicles in the surf zone. *Ocean engineering*, 2022; 257, 111607. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111607> EDN: OUBLAN

21. Zhileikin M.M., Padalki B.V. "A Mathematical Model of Rolling of an Elastic Wheel on Irregularities of a Non-Deformable Support Foundation." *News of Higher Educational Institutions. Mechanical Engineering* 3 (672) (2016): 24–29. (in Russ.) EDN: VOJFZZ

22. Zhileikin M.M., Kozelkov O.A., Neverov V.A. Mathematical model of rolling on uneven support base of an elastic wheel based on a discrete set of contact

elements. *Gruzovik*. 2025. No. 6. P. 8-16. (in Russ.) <https://doi.org/10.36652/1684-1298-2025-6-8-16>. EDN: BAVNVA.

23. Neil D. Bennett, Barry F.W. Croke, Giorgio Guariso, Joseph H.A. Guillaume, Serena H. Hamilton, Anthony J. Jakeman, Stefano Marsili-Libelli, Lachlan T.H. Newham, John P. Norton, Charles Perrin, Suzanne A. Pierce, Barbara Robson, Ralf Seppelt, Alexey A. Voinov, Brian D. Fath, Vazken Andreassian. Characterising performance of environmental models. *Environmental modelling & software*, 2013; 40, 1-20. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2012.09.011>

24. Liu Z., Liu Y., Gao Q. In-plane flexible ring modeling and a nonlinear stiffness solution for heavy-load radial tires. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022; 171, 108956. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2022.108956> EDN: MBMMDO

25. Xia D., Liu Q., Lu D. Friction prediction and application to lateral or longitudinal slip force prediction. *Machines*, 2022; 10(9), 791. <https://doi.org/10.3390/machines10090791> EDN: PENJSI

26. Junior A.D.S., Birkner C., Jazar R.N., Marzbani H. Coupled lateral and longitudinal controller for over-actuated vehicle in evasive maneuvering with sliding mode control strategy. *IEEE Access*, 2023; 11, 33792-33811. <https://doi.org/10.1109/access.2023.3264277> EDN: GNPOKM

ЗАЯВЛЕННЫЙ ВКЛАД АВТОРОВ

Жилейкин М.М. Разработка математической модели. Планирование и проведение эксперимента.

Козелков О.А. Формулирование общей идеи исследования. Написание раздела «Обсуждение и заключение». Общая редакция текста.

Косенков А.А. Проведение эксперимента, обработка результатов.

Неверов В.А. Выполнение разделов «Введение» и «Результаты». Обработка результатов эксперимента.

CO-AUTHORS' CONTRIBUTION

Zhileykin M.M. Development of the mathematical model. Planning and conducting the experiment.

Kozelkov O.A. Formulating the general research idea. Writing the "Discussion and conclusion" section. General editing of the text.

Kosenkov A.A. Conducting the experiment, processing the results.

Neverov V.A. Writing the "Introduction" and "Results" sections. Processing of the experiment results.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Жилейкин Михаил Михайлович – д-р техн. наук, проф., старший научный сотрудник научно-технического центра «Автоматизированные технические системы» Московского политехнического университета (107023, г. Москва, ул. Б. Семёновская, д. 38).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8851-959X>,
SPIN-код: 6561-3300,
Scopus ID: 57201085829,
e-mail: jileykin_m@mail.ru

Козелков Олег Александрович – д-р техн. наук, проф., начальник научно-технического центра «Автоматизированные технические системы» Московского политехнического университета (107023, г. Москва, ул. Б. Семёновская, д. 38).

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4163-3721>,
SPIN-код: 8140-1200,
e-mail: kozelkow@mail.ru

Косенков Алексей Александрович – аспирант, эксперт научно-технического центра «Автоматизированные технические системы» Московского политехнического университета (107023, г. Москва, ул. Б. Семёновская, д. 38).

e-mail: kosenkovalexey@mail.ru

Неверов Всеволод Анатольевич – канд. техн. наук, научный сотрудник научно-технического центра «Автоматизированные технические системы» Московского политехнического университета (107023, г. Москва, ул. Б. Семёновская, д. 38).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0515-9785>,
SPIN-код: 4896-2213,
Scopus ID: 57196422317,
e-mail: sevasxp@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Zhileykin Mikhail Mikhailovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Senior Research Associate, Scientific and Technical Center "Automated Technical Systems", Moscow Polytechnic University (38, B. Semyonovskaya St., Moscow, 107023).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8851-959X>,
SPIN-code: 6561-3300,
Scopus ID: 57201085829,
e-mail: jileykin_m@mail.ru

Kozelkov Oleg Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Scientific and Technical Center "Automated Technical Systems", Moscow Polytechnic University (38, B. Semyonovskaya St., Moscow, 107023).

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4163-3721>,
SPIN-code: 8140-1200,
e-mail: kozelkow@mail.ru

Kosenkov Aleksey Aleksandrovich – postgraduate student, expert of Scientific and Technical Center "Automated Technical Systems", Moscow Polytechnic University (38, B. Semyonovskaya St., Moscow, 107023).

e-mail: kosenkovalexey@mail.ru

Neverov Vsevolod Anatolyevich – Candidate of Technical Sciences, Research Associate, Scientific and Technical Center "Automated Technical Systems", Moscow Polytechnic University (38, B. Semyonovskaya St., Moscow, 107023).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0515-9785>,
SPIN-code: 4896-2213,
Scopus ID: 57196422317,
e-mail: sevasxp@mail.ru